Résumé 5 – Familles sommables

Ensembles dénombrables

Définition : Ensemble dénombrable

- Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
- Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si E est dénombrable, on peut numéroter ses éléments :

$$E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

- Le produit cartésien d'un nombre *fini* d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- La réunion *finie* ou *dénombrable* d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Familles sommables de nombres complexes

$(u_i)_{i\in I}$ désigne une famille de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable I.

→ Cas des familles de réels positifs

Définition

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si

$$\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \subset I, J \text{ finie}\right\} \text{ est majoré.}$$

Dans ce cas, on pose : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i$

Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Proposition : Lien avec les séries numériques

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Théorème : Sommation par paquets (cas positif)

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout entier n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;

(ii) la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

→ Cas des familles de nombres réels ou complexes

Définition

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Toute combinaison linéaire de familles sommables est sommable et pour une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$:

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$$

Théorème : Sommation par paquets (cas complexe)

Soient (I_n) une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes supposée sommable. Alors,

(i) pour tout entier n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;

(ii) la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Corollaire : Convergence commutative

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Application aux séries doubles

Théorème : Tonelli discret

Soit $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Cette famille est sommable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) pour tout entier n, $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}$ converge

(ii) la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} u_{n,p}\right)$ converge

Si c'est le cas, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

Théorème : Fubini discret

Si la famille de complexes $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

On retrouve également le théorème du produit de Cauchy.