16 Fonctions vectorielles et courbes planes

« La ligne courbe est la ligne la plus jolie d'un point à un autre. »
Mae West, actrice américaine (1893–1960)

Plan de cours

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. En pratique, on considérera souvent des fonctions à valeurs dans $E=\mathbb{R}^p$, donc des fonctions de la forme :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (f_1(t),\dots,f_p(t)) \end{array} \right.$$

Les fonctions numériques $f_i : I \to \mathbb{R}$ pour $i \in \{1,\dots,p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f. Plus généralement, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$, on peut écrire $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$.
L'équivalence des normes en dimension finie nous assurera que les propriétés énoncées ultérieurement (comme la continuité et la dérivabilité) ne dépendent pas de la base choisie.

Dans tout ce chapitre, f désignera une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ de dimension finie p.

I | Limite et continuité d'une fonction vectorielle

Définition 16.1 : Limite

On dit que f admet $\ell \in E$ pour limite en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t\to t_0} \|f(t)-\ell\| = 0$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0 \quad \forall t \in I \quad |t-t_0|<\eta \Longrightarrow \|f(t)-\ell\|<\varepsilon$$

On peut montrer que lorsque la limite existe, elle est unique. De plus, si $E=\mathbb{R}^p$, f admet $\ell=(\ell_1,\dots,\ell_p)\in\mathbb{R}^p$ pour limite en $t_0 \in \mathbb{R}$ si et seulement si chaque fonction composante f_i admet ℓ_i comme limite en t_0.

Exemple

L'application $t \mapsto \begin{pmatrix} \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right) \\ \sin\left(2t^2-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ admet une limite en 0. Que vaut-elle ?

Définition 16.2 : Continuité

- f est dite continue en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire si :

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0 \quad \forall t \in I \quad |t-t_0|<\eta \Longrightarrow \|f(t)-f(t_0)\|<\varepsilon$$

- On dit que f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Proposition 16.3 : Continuité et fonctions composantes

f est continue en $t_0 \in I$ si et seulement si f_i est continue en t_0 quel que soit $i \in \{1, \dots, p\}$.

Exemple

L'application $t \longmapsto \begin{pmatrix} \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right) \\ \sin\left(2t^2 - \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix}$ est continue sur $\mathbb{R}$ car chacune des fonctions composantes l'est.

II | Dérivabilité d'une fonction vectorielle

A – Dérivation en un point et sur un intervalle

Définition 16.4 : Dérivabilité

- f est dite dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe.

  On appelle alors vecteur dérivé en t_0 le vecteur $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ et on le note $f'(t_0)$.
- On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I et on appelle alors dérivée de f l'application $f' : t \longmapsto f'(t)$.

De manière équivalente, f dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$ existe. Cela revient à dire que,

$$f(t) \underset{t \to t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + \mathrm{o}(t - t_0) \quad \text{i.e.} \quad f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \mathrm{o}(h)$$

La dérivabilité de f se traduit également par la dérivabilité des fonctions comosantes.

Proposition 16.5

Si E est muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$, alors f est dérivable si et seulement si les fonctions f_i le sont. Dans ce cas, $f' = f_1' e_1 + \cdots + f_p' e_p$.

Exercice 1

Montrer que l'application $t \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{\cos(t)}{\sqrt{1+t^2}} & \dfrac{-\sin(t)}{t^3} \end{pmatrix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

On peut, comme en dimension 1, définir le vecteur dérivé de f à droite ou à gauche, mais l'intérêt est mince.

Proposition 16.6

Toute application dérivable est continue.

Démonstration

Si f est dérivable en t_0, $f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \mathrm{o}(h)$ donc $f(t_0 + h) \xrightarrow[h \to 0]{} f(t_0)$. ■

B – Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 16.7 : Premières opérations

Soient $f, g : I \to E$ deux fonctions dérivables sur I.

(i) si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$;

(ii) si $\lambda : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, $\lambda \cdot f$ l'est également et $(\lambda \cdot f)' = \lambda' \cdot f + \lambda \cdot f'$;

(iii) si $\lambda : \mathbb{R} \to I$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f \circ \lambda$ l'est également et $(f \circ \lambda)' = \lambda' \cdot (f' \circ \lambda)$;

Attention, le produit $f \times g$ n'a aucun sens lorsque $p \neq 1$!

Proposition 16.8 : Dérivabilité et application linéaire

Soient $f : I \to E$ une fonction dérivable sur I et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $u \circ f$ est dérivable et $(u \circ f)' = u \circ f'$.

Démonstration

Tout repose sur la linéarité (et donc la continuité de u). En effet,

$$\frac{u(f(t_0+h))-u(f(t_0))}{h} = u\left(\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} u(f'(t_0))$$

On peut aussi écrire $u(f(t_0+h))) \underset{h\to 0}{=} u(f(t_0))+h\,u(f'(t_0))+\mathrm{o}(h)$ par continuité de u. ■

Proposition 16.9 : Dérivabilité et application bilinéaire

Soient $f : I \to F$ et $g : I \to G$ deux fonctions dérivables sur I et $B : F\times G \to E$ bilinéaire. Alors $B(f,g)$ est dérivable sur I et :

$$B(f,g)' = B(f',g)+B(f,g')$$

En particulier,

- si $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne un produit scalaire sur E, $\langle f|g\rangle$ est dérivable sur I et $\langle f|g\rangle' = \langle f'|g\rangle + \langle f|g'\rangle$;
- si $E = \mathbb{R}^3$, $f\wedge g$ est dérivable sur I et $(f\wedge g)' = f'\wedge g + f\wedge g'$.

Démonstration

Travaillons ici avec les développements limités. f et g sont supposées dérivables sur I donc pour tout $t_0 \in I$,

$$f(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0)+h\cdot f'(t_0)+\mathrm{o}(h) \quad \text{et} \quad g(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} g(t_0)+h\cdot g'(t_0)+\mathrm{o}(h)$$

Par bilinéarité de B,

$$B(f(t_0+h),g(t_0+h)) \underset{h\to 0}{=} B(f(t_0),g(t_0))+h\big[B(f'(t_0),g(t_0))+B(f(t_0),g'(t_0))\big]+\mathrm{o}(h)$$

C'est la continuité de B qui permet, par exemple, d'affirmer que $B(f(t_0),\mathrm{o}(h)) = (h)$. ■

La propriété précédente s'étend à toute application multilinéaire.

Exemple

Si E est un espace euclidien et f dérivable, $\|f\|$ est constante si et seulement si le vecteur vitesse f' est orthoradial, c'est-à-dire s'il est orthogonal à f en tout point.

C – Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition 16.10

Soit $k\in\mathbb{N}$. L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.

Lorsque l'on multiplie f par une fonction λ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on retrouve un résultat bien connu, que l'on démontre par récurrence.

Proposition 16.11 : Formule de Leibniz

Si $f : I \to \mathbb{R}^p$ et $\lambda : I\to\mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur I alors,

$$(\lambda\cdot f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\lambda^{(k)}f^{(n-k)}$$

III | Intégration d'une fonction vectorielle sur un segment

A – Définition et premières propriétés

Pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un e.v.n. de dimension p, il suffit d'intégrer les fonctions composantes (ce sont des fonctions numériques) dans une base prédéfinie :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^p f_i(t)e_i\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$$

À condition bien entendu que le résultat ne dépende pas de la base choisie, ce que l'on admet !

Théorème / Définition 16.12 : Intégrale d'une fonction vectorielle continue

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue sur E, e.v.n. de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}=(e_1,\ldots,e_p)$.
Le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$, on l'appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on note :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t\right)e_i$$

On retrouve les propriétés classiques de l'intégrale en raisonnant composante par composante, à l'exception de la positivité et de la croissance (propriétés découlant de la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$).

Théorème 16.13 : Propriétés de l'intégrale

Soient $f,g:[a,b]\to E$ deux fonctions continues où $(E,\|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension finie, avec $a<b$.

(i) *Linéarité de l'intégrale* : $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K},\quad \displaystyle\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

(ii) *Relation de Chasles* : $\forall c\in[a,b],\quad \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$

(iii) *Convergence des sommes de Riemann* : $\displaystyle\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

(iv) *Inégalité triangulaire* : $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$

Démonstration

Si les trois premières propriétés découlent directement d'un travail sur les fonctions composantes dans une base donnée, la dernière est un peu plus subtile. Appuyons-nous sur les sommes de Riemann en posant, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n(f)=\displaystyle\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n f(t_k)$ où $t_k=a+k\cdot\dfrac{b-a}{n}$.
Par inégalité triangulaire (discrète),

$$\|S_n(f)\| = \left\|\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n f(t_k)\right\| \leqslant \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n \|f(t_k)\|$$

- Comme $S_n(f)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\displaystyle\int_a^b f$ et $\|\cdot\|$ est continue, $\|S_n(f)\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\left\|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\|$.
- De même, par continuité de $\|f\|$, $\displaystyle\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{k=1}^n\|f(t_k)\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_a^b\|f\|$.

On peut conclure en passant à la limite dans l'inégalité : $\displaystyle\left\|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

B – Intégrale fonction de sa borne supérieure

On retrouve également les théorèmes classiques de première année qui établissent le lien entre dérivation et intégration.

Théorème 16.14 : Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Alors, pour tout $a \in I$, $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Théorème 16.15

Pour toute fonction $f : I \to E$ de classe $\mathscr{C}^1$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

C'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 0! Il en découle presque immédiatement une autre propriété bien connue.

Corollaire 16.16 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant M \cdot |b - a|$$

Démonstration

Soient $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. Alors,

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leqslant M \cdot (b - a)$$

Si $b < a$, il suffit d'intervertir les bornes de l'intégrale, la valeur absolue fait alors son œuvre. ■

C – Formules de Taylor

Théorème 16.17 : Formules de Taylor

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Soient $a, x \in I$.

- *Formule de Taylor avec reste intégral* :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- *Inégalité de Taylor-Lagrange* :

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leqslant M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{avec } M = \sup_{t \in [a,b]} \|f^{(n)}(t)\|$$

- *Formule de Taylor-Young* :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

IV | Suites et séries de fonctions vectorielles

En vue de l'étude prochaine des équations différentielles, on généralise sommairement les résultats du chapitre « Suites et séries de fonctions » aux fonctions vectorielles.

Par la suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignera une suite de fonctions $f_n : I \to E$ où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé supposé de dimension finie.

Définition 16.18 : Convergences simple et uniforme (suite de fonctions)

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

  Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall x \in I, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang sur I et :

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sup_{x\in I} \|f_n(x) - f(x)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \forall x \in I, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leqslant \varepsilon$$

Outre le fait que la convergence uniforme entraîne la convergence simple, on retrouve tous les résultats relatifs à la continuité, dérivabilité et intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Par exemple :

Théorème 16.19 : Continuité de la limite uniforme

La limite uniforme d'une suite convergente de fonctions continues sur I est continue sur I.

On considère désormais la série de fonctions $\sum f_n$ où les fonctions f_n sont définies sur I et à valeurs dans E.

Définition 16.20 : Convergences simple, uniforme et normale

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.
  En cas de convergence, on appelle *fonction somme* de la série la fonction S définie par :

$$\forall x \in I, \quad S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.
- On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si les fonctions f_n sont bornées sur I (à partir d'un certain rang) et si la série numérique $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.

Bien entendu, si la série de fonctions converge normalement sur I alors elle converge uniformément sur I.

Théorème 16.21

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E convergeant uniformément vers f sur I et soit $a \in I$.

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Attention aux liens et confusions possibles avec la convergence absolue telle que définie dans le chapitre « Norme sur un espace vectoriel normé ».

On rappelle l'extension suivante du théorème.

Théorème 16.22 : Théorème de la double limite

Soient $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans E et a un point adhérent à I (ou bien $a = \pm\infty$). On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite ℓ_n en a.
- La série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite en a et $\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$.

S'ajoutent les deux théorèmes suivants de dérivation et d'intégration terme à terme *sur un segment.*

Théorème 16.23 : Dérivation terme à terme

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans E. On suppose que :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- $\sum f_n$ converge simplement sur I.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout segment de I, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Théorème 16.24 : Intégration terme à terme sur un segment

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et à valeurs dans E, convergeant uniformément sur le segment $[a,b]$. Alors $\sum \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$$

En revanche, le théorème de convergence dominée et son homologue, le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque, ne s'appliquent pas dans le cas d'une fonction vectorielle.

V | Courbes planes et arcs paramétrés

Cette partie du cours relève essentiellement de votre culture, rien ne sera vraiment exigible le jour du concours.

A – Divers modes de définition d'une courbe

Certaines parties du plan sont appelées « courbes ». Sans donner de définition rigoureuse de cette notion [1], nous allons étudier trois modes de définition de courbes.

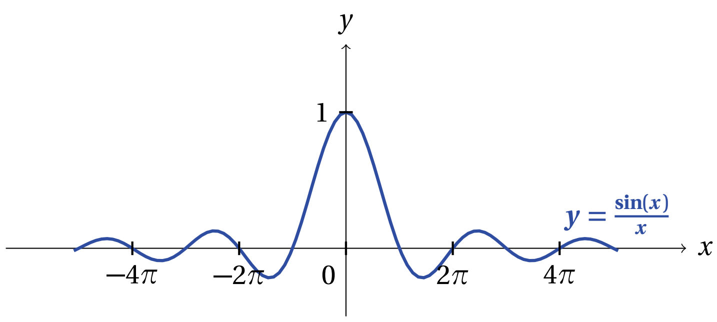
1 – Équation cartésienne

Définition 16.25 : Équation cartésienne

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I. La courbe définie par l'équation cartésienne $y = f(x)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$, c'est-à-dire l'ensemble :

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I \text{ et } y = f(x)\}$$

1. Intuitivement, une courbe est un objet unidimensionnel mais il reste à préciser cette notion de dimension.



COURBE REPRÉSENTATIVE DE LA FONCTION SINUS CARDINAL

2 – Paramétrage

Définition 16.26 : Équations paramétriques

Soit $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux applications définies sur un intervalle I. La courbe définie par le paramétrage $x = x(t)$, $y = y(t)$ est l'ensemble des points de coordonnées $(x(t), y(t))$, c'est-à-dire l'ensemble :

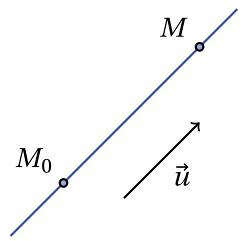
$$\{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in I\}$$

Exemple – Paramétrage d'une droite

Considérons la droite passant par le point $M_0(x_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

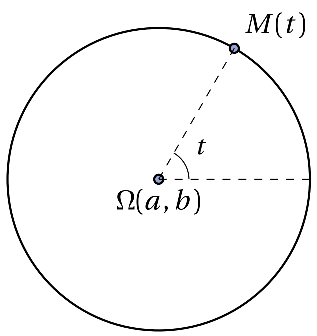
$M(x, y)$ appartient à cette droite si et seulement si $\overrightarrow{M_0M}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{M_0M} = t\,\vec{u} \iff \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} x = x_0 + t\,a \\ y = y_0 + t\,b \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$



Exemple – Paramétrage d'un cercle

Considérons le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R. $M(x, y)$ appartient au cercle si et seulement si $\Omega M = R$, c'est-à-dire si $\left(\frac{x-a}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-b}{R}\right)^2 = 1$.



Il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{x-a}{R} = \cos(t) \quad \text{et} \quad \frac{y-b}{R} = \sin(t)$$

Ce qui fournit le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x(t) = a + R\cos(t) \\ y(t) = b + R\sin(t) \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3 – Équation implicite

Définition 16.27 : Équation implicite

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application définie sur un intervalle I. La courbe d'équation $F(x, y) = 0$ est l'ensemble :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x, y) = 0\}$$

Exemples – Équations de droites et de cercles

- Une droite de vecteur normal $\overrightarrow{N}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme $\alpha x+\beta y-\gamma=0$.
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne usuelle, un cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R admet comme équation $(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0$.

B – Changement de mode de représentation

– On transforme aisément une équation cartésienne $y=f(x)$ en équations paramétriques ; il suffit de prendre x comme paramètre : $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$

L'application $x\mapsto(x,f(x))$ est injective [2], la courbe ne peut donc avoir de points doubles.

– Une équation cartésienne $y=f(x)$ est en fait un cas particulier d'équation implicite :

$$F(x,y)=y-f(x)=0$$

Les transformations inverses ne sont possibles, en général, que localement.

Exemple – Cercle

Considérons le cercle d'équation $x^2+y^2=R^2$.
On trouve alors $y=f(x)$ avec $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ ou $f(x)=-\sqrt{R^2-x^2}$. Dans les deux cas, la courbe représentative de f est un demi-cercle. On peut démontrer qu'il n'existe pas d'application $f:I\to\mathbb{R}$ telle que l'équation $y=f(x)$ définisse « entièrement » un cercle !

C – Généralités sur les arcs paramétrés

Définition 16.28 : Arc paramétré, support

- On appelle arc paramétré toute application f de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- On appelle alors support de l'arc paramétré par f l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x(t),y(t))$ pour $t\in I$.

On ne confondra pas l'arc paramétré (ou courbe paramétrée) et son support tout comme on distinguera bien en physique le mouvement de la trajectoire. Deux courbes paramétrées distinctes peuvent en effet avoir même support : les images sont identiques mais la façon de parcourir la courbe (au sens géométrique) diffère.

Exemple

On peut paramétrer le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point de coordonnées $(1,0)$ des deux façons suivantes :

$$\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}\quad\text{pour } \theta\in]-\pi,\pi[;\qquad \begin{cases}x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\\ y=\dfrac{2u}{1+u^2}\end{cases}\quad\text{pour } u\in\mathbb{R}$$

On peut facilement faire le lien (dans ce cas) entre les deux paramétrages en posant $u=\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$.

Par la suite, f désignera une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, que l'on suppose muni de sa structure euclidienne usuelle. On pose $f(t)=(x(t),y(t))$ où x et y représentent les fonctions composantes de la fonction f. Comme nous l'avons vu, cette application f définit une courbe paramétrée. On utilisera selon les besoins (point de vue affine/vectoriel) :

– le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t),y(t))$;

– le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ de coordonnées $(x(t),y(t))$

2. Quand on trace une courbe d'équation $y=f(x)$, on ne peut pas « recroiser la courbe ».

D – Courbes paramétrées en mécanique et en mathématiques

L'étude d'un mouvement ponctuel en mécanique classique se modélise par une application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (pour un mouvement plan). Si on pose $f : t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) = (x(t), y(t))$, $f(t)$ représente la position du point mobile à l'instant t. Le paramètre t représente dans ce formalisme le temps.
La trajectoire subséquente au mouvement est l'ensemble décrit par le point $M(t)$ lorsque t varie, c'est donc une courbe au sens géométrique. Les notions de vitesse et d'accélération sont représentées par les dérivées première $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ de l'application f.
Le mouvement, c'est-à-dire l'application f elle-même, indique de quelle manière cette courbe est décrite :

- dans quel sens (problème d'orientation de la courbe) ;
- avec quelle vitesse scalaire $\left\| \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \right\|$;
- quelle est la distance parcourue pendant une durée donnée ;
- *etc.*

En général, un mouvement est défini par des conditions initiales (position du mobile à l'instant t_0, vitesse initiale) et par la donnée des forces qui agissent sur le mobile. La relation fondamentale de la dynamique se traduit alors par une équation différentielle.

En mathématiques, la recherche de certains lieux géométriques conduit à des équations dont les solutions sont obtenues sous forme paramétrique, le lieu est donc une courbe paramétrée. Le paramètre a généralement dans ce cas une véritable interprétation géométrique. Le choix du paramètre est d'ailleurs une étape importante dans le recherche du lieu.

E – Construction d'une courbe paramétrée

1 – Domaine de définition $\mathscr{D}$

Il s'agit de déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction f, intersection des domaines de définition des deux fonctions x et y.

Exemple

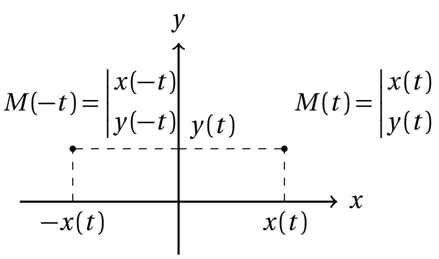
On trouve $\mathscr{D} =]0,1]$ pour $\begin{cases} x(t) = \ln(t) \\ y(t) = \sqrt{1-t} \end{cases}$

2 – Recherche des symétries

Ceci permet de réduire le domaine d'étude[3]. Il existe de nombreuses possibilités.

- Si x et y sont T-périodiques, il suffit d'étudier x et y sur un intervalle de longueur T.
- Si x et y sont paires, $M(-t) = M(t)$ et on peut alors simplement travailler sur $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$.
- Si x et y sont impaires, $M(-t) = -M(t)$. On étudie les variations de x et y sur $\mathscr{D} \cap \mathbb{R}_+$ et on obtient la courbe en effectuant une symétrie centrale de centre O.

Tout est plus simple sur un dessin !



Exemple de symétrie (x impaire, y paire)

3. Cette étape est essentielle : en limitant le domaine d'étude, on espère limiter la difficulté technique d'étude du signe de la dérivée.

Exemple

Construction du cercle paramétré par $\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$

On constate que $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ mais on peut restreindre le domaine d'étude en constatant que $M(t+2\pi) = M(t)$. On peut donc se placer sur $[-\pi, \pi]$. Comme de plus, $x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$, on peut se contenter d'étudier les variations de x et y sur $[0, \pi]$ et obtenir la courbe « entière » par réflexion par rapport à l'axe (Ox). Il ne reste plus qu'à tracer la courbe !

3 – Étude des variations

Il s'agit comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle d'étudier le signe des dérivées x' et y' sur le domaine d'étude restreint. Ceci nous permet d'obtenir les variations de x et y [4].

Exemple

Étude de la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \sin(2t) \end{cases}$

Les fonctions considérées sont 2π-périodiques et impaires, on étudiera seulement leurs variations sur $[0, \pi]$.

$$\forall t \in [0, \pi], \quad x'(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad y'(t) = 2\cos(2t)$$

D'où les variations suivantes.

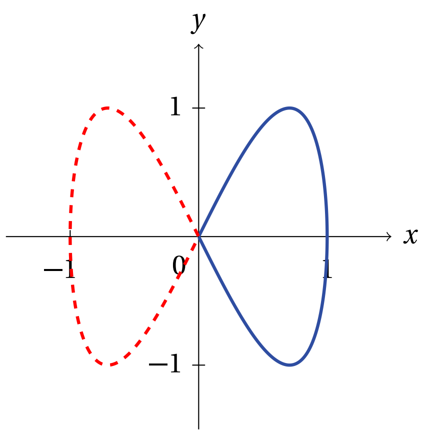
t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	$0 \nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \nearrow$	1	$\searrow \frac{1}{\sqrt{2}} \searrow$	0
$y(t)$	$0 \nearrow$	1	$\searrow 0 \searrow$	$-1 \nearrow$	0
$y'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Il suffit de tracer la courbe passant par les points :

$$A(0,0),\ B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right),\ C(1,0) \text{ et } D\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -1\right)$$

en respectant les variations précédentes.

On complète alors la courbe obtenue par symétrie centrale.



LEMNISCATE DE BERNOULLI

Cette étude n'est cependant pas satisfaisante et l'allure de la courbe dessinée à partir de ces résultats n'est généralement que très approximative. Il reste à étudier son allure de manière plus fine au voisinage de certains points en s'intéressant notamment aux tangentes.

4. On prendra soin de juxtaposer les variations de x et y dans le tableau pour plus de lisibilité lors du tracer.

4 – Points réguliers

Définition 16.29 : Tangente

Soit $t_0 \in I$.

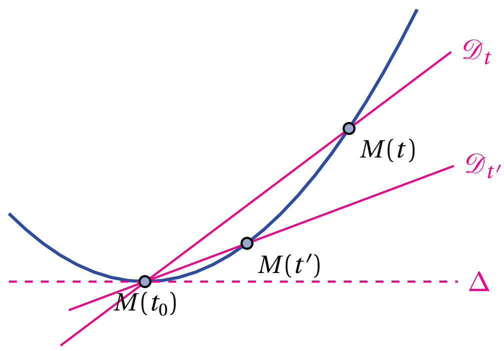
– si le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|}$ admet une limite $\vec{u}$ lorsque $t \to t_0^-$, on appelle demi-tangente à gauche en $M(t_0)$ la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{u}$.

– si le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|}$ admet une limite $\vec{v}$ lorsque $t \to t_0^+$, on appelle demi-tangente à droite en $M(t_0)$ la demi-droite issue de $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{v}$.

– Si les demi-tangentes à gauche et à droite existe et si, avec les notations précédentes, $\vec{u} = \pm\vec{v}$, alors on appelle tangente en $M(t_0)$ la droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par $\vec{u}$.

La tangente n'est rien d'autre, lorsqu'elle existe, que la limite des sécantes.

Sur le schéma ci-contre, la tangente Δ au point $M(t_0)$ apparaît comme une droite limite : la limte de $\mathscr{D}_t$ quand $t \to t_0$.



TANGENTE VUE COMME LIMITE DES SÉCANTES

Définition 16.30 : Point régulier

Un point $M(t_0)$ est dit régulier lorsque $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$ ne s'annule pas.

Sinon, le point est dit stationnaire (ou singulier).

La courbe est dite régulière si le vecteur dérivée ne s'annule pas en tout point.

Théorème 16.31 : Tangente en un point régulier

Si $M(t_0)$ est régulier, la courbe admet une tangente en ce point dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

Démonstration

Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si $M(t_0)$ est régulier, on peut écrire :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \text{ donc } \lim_{t \to t_0} \frac{\left\|f(t) - f(t_0)\right\|}{|t - t_0|} = \left\|f'(t_0)\right\| \neq 0$$

Ainsi,

$$\frac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{\left\|\overrightarrow{M(t_0)M(t)}\right\|} = \frac{f(t) - f(t_0)}{\left\|f(t) - f(t_0)\right\|} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \times \frac{t - t_0}{\left\|f(t) - f(t_0)\right\|} \xrightarrow[t \to t_0^{\pm}]{} \pm \frac{f'(t_0)}{\left\|f'(t_0)\right\|}$$

La tangente existe, elle est dirigée par le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ qui est colinéaire au vecteur $\dfrac{f'(t_0)}{\left\|f'(t_0)\right\|}$. ■

Si le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ est non nul[5] et qu'il a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors la tangente au point $M(t_0)$ admet comme vecteur normal $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ et une équation de la tangente est alors :

$$-b\,x + a\,y = c$$

où l'on détermine c en utilisant le fait que $M(t_0)$ appartient lui-même à la tangente.

La pente de la tangente vaut alors $\dfrac{b}{a} = \dfrac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple

> Tous les points du cercle paramétré par $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ sont réguliers.
>
> En effet, les coordonnées de $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ ne peuvent s'annuler simultanément.
>
> La tangente en un point $M(t_0)$ est alors dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$.

5. Si le vecteur était nul, cela n'aurait pas de sens de dire que la tangente est dirigée par ce vecteur.