Résumé 12 – Fonctions d'une variable réelle

À l'exception de la dernière partie, on ne considère que des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Continuité

→ Continuité en un point, sur un intervalle

f est continue en $x_0 \in I$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e. si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

La somme, le produit et la composée de fonctions continues sont continues.

Théorème : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f continue sur I avec $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. Alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a, b]$ tel que $y = f(x)$.

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. (TVI bis)

Une fonction continue qui change de signe sur I s'annule (au moins une fois) sur I.

Théorème : Théorème des bornes atteintes

Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

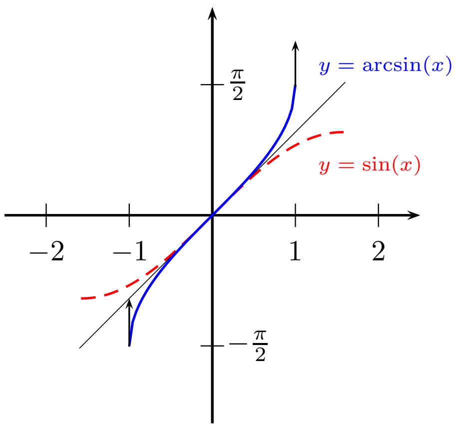
On remarquera qu'en général, $f([a, b]) \neq [f(a), f(b)]$.

Théorème : Théorème de la bijection

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus, la bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et de même monotonie que f.

Le graphe de f^{-1} est symétrique à celui de f par rapport à la première bissectrice.

→ Fonctions circulaires réciproques



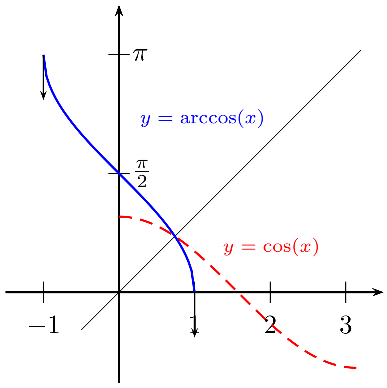
Représentation de la fonction arcsin

La fonction arcsin est définie et continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$.

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \arcsin(\sin(x)) = x$$

La fonction arcsin est enfin impaire :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$



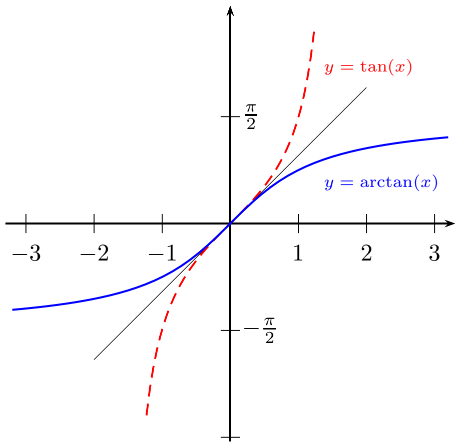
Représentation de la fonction arccos

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1, 1]$ et à valeurs dans $[0, \pi]$. Elle est dérivable sur $]-1, 1[$.

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos(\arccos(x)) = x$$
$$\forall x \in [0, \pi], \quad \arccos(\cos(x)) = x$$

La fonction arccos vérifie enfin :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$



Représentation de la fonction arctan

La fonction arctan est définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan(x)) = x$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \arctan(\tan(x)) = x$$

La fonction arctan est impaire et vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{\pi}{2}$$

Dérivabilité

f est dérivable en $x_0 \in I$ si $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ possède une limite finie en x_0.

Théorème

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

f est dérivable en x_0 si et seulement si,

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(x_0)+hf'(x_0)+\mathrm{o}(h)$$

La somme, le produit et la composée de fonctions dérivable sont dérivables.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf'-fg'}{g^2}\ ; \quad (g\circ f)' = f'\cdot(g'\circ f)$$

Théorème : Dérivabilité de la bijection réciproque

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa bijection réciproque. Si f est dérivable en x_0 et si $f'(x_0)\neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$${f^{-1}}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Dérivées des fonctions circulaires réciproques :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;\ \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ;$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Théorème : Limite de la dérivée

Soit f une fonction continue sur I et dérivable sur $I\setminus\{x_0\}$. Si $f'(x)$ admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ en x_0,

- f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\ell$;
- f' est de plus continue en x_0.

Théorème : Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I. Alors, fg est également de classe $\mathscr{C}^n$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}.$$

Théorème : Théorème de Rolle

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et si $f(a)=f(b)$ alors il existe $x\in]a,b[$ tel que $f'(x)=0$.

Théorème : Formule des accroissements finis

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $c\in]a,b[$ tel que :

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Si $|f'|$ est majorée par un réel M sur I, on a alors (inégalité des accroissements finis) :

$$\forall x,y\in I,\quad |f(y)-f(x)|\leqslant M|x-y|$$

Application à l'étude des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Formules de Taylor

Soient f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $a,b\in I$.

- Formule de Taylor avec reste intégral

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

- Inégalité de Taylor-Lagrange

$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right| \leqslant M\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

  où $M = \sup\limits_{[a,b]}|f^{(n+1)}|$.

- Formule de Taylor-Young

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \mathrm{o}((b-a)^n)$$

Ces formules sont utiles pour déterminer un développement limité, pour justifier l'existence d'un développement en série entière, etc.

Développements limités et relations de comparaison

Soient $f,g : I\to\mathbb{R}$ avec g ne s'annulant pas au voisinage de x_0, sauf éventuellement en x_0. On dit que :

- f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1 \quad \left[\text{notation : } f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\right]$$

- f est négligeable devant g au voisinage de x_0 si :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0 \quad \left[\text{notation : } f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{o}(g(x))\right]$$

- f est dominée par g au voisinage de x_0 si :

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \text{ est bornée } \left[\text{notation : } f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{O}(g(x))\right]$$

Proposition : Lien entre $\sim$ et o

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to x_0}{=} g(x)+\mathrm{o}(g(x))$$

Définition : Développement limité

On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 s'il existe $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n + \mathrm{o}((x-x_0)^n)$$

À connaître : Opérations usuelles sur les développements limités, intégration terme à terme (sans oublier la constante d'intégration), utilisation de la formule de Taylor-Young...

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$
$$\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$
$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$
$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$
$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Développements limités usuels

Fonctions convexes

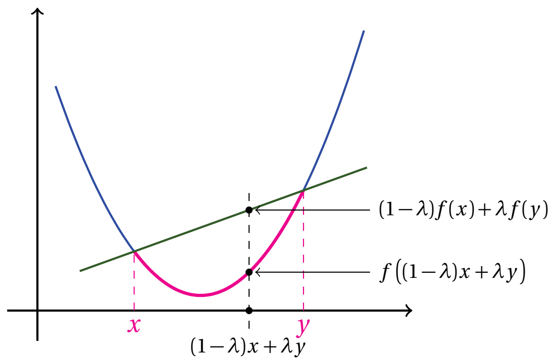
→ Généralités

Définition : Fonction convexe, fonction concave

Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout $(x,y)\in I^2$ et tout $\lambda\in[0,1]$:

$$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$$

Une application f est dite concave lorsque $-f$ est convexe.



Une fonction est convexe si et seulement si son graphe est au-dessous de toutes ses cordes.

Proposition : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
Pour tous $x_1,\dots,x_n \in I$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs de somme 1. Alors,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

→ Caractérisations géométriques

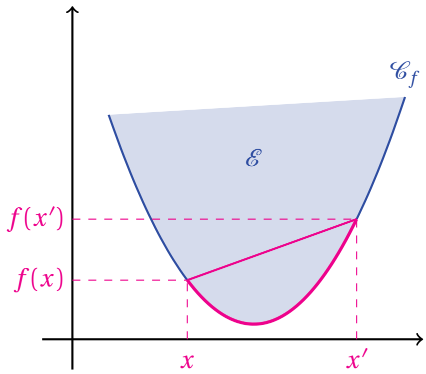
Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle épigraphe de f l'ensemble des points du plan situés au-dessus du graphe de f. Autrement dit,

$$\mathscr{E} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geqslant f(x)\}$$

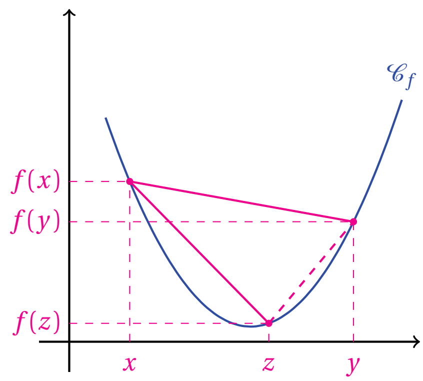
Proposition

Une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.



Théorème : Croissance de la pente

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, $t \mapsto \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$ est croissante sur $I \setminus \{x\}$.



Corollaire : Inégalité des pentes

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x,y,z \in I$ vérifiant $x<z<y$. Alors,

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

→ Caractérisation par la dérivée

La croissance de la dérivée permet d'établir facilement la convexité d'une fonction dérivable.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I. Alors, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe

(ii) f' est croissante

(iii) le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes

Corollaire

Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I. Alors f est convexe (resp. concave) si et seulement si $f'' > 0$ (resp. $f'' < 0$).

Fonctions vectorielles et arcs paramétrés

On appelle fonction vectorielle d'une variable réelle toute fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie. Si $E = \mathbb{R}^p$, une telle fonction sera de la forme :

$$f : \left| \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ t & \longmapsto & (f_1(t), \dots, f_p(t)) \end{array} \right.$$

Les fonctions numériques $f_i : I \to \mathbb{R}$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ sont appelées *fonctions composantes* ou *fonctions coordonnées* de f. Si E est muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$, on peut toujours écrire $f = f_1 e_1 + \cdots + f_p e_p$.

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to E$, où E est de dimension p.

→ Dérivabilité d'une fonction vectorielle

f est dérivable en $t_0 \in I$ si $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ existe. Alors,

$$f(t) \underset{t \to t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot f'(t_0) + o(t - t_0)$$

La dérivabilité de f équivaut à celle de ses fonctions composantes. De plus,

- Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.
- Toute composée de fonctions dérivables est dérivable.
- Si $f : I \to F$ et $g : I \to G$ sont dérivables sur I et $B : F \times G \to E$ est bilinéaire, $B(f, g)$ est dérivable et :

$$B(f, g)' = B(f', g) + B(f, g')$$

Application classique : dérivation d'un produit scalaire ou d'un produit vectoriel.

L'application f est dite de classe $\mathscr{C}^k$ sur I si elle est dérivable k fois sur I et si sa dérivée k-ième, notée $f^{(k)}$, est continue sur I.

→ Intégration sur un segment

Si $f : [a, b] \to E$ est continue sur $[a, b]$, on pose, en munissant E d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^p f_i(t) e_i \right) \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^p \left(\int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t \right) e_i$$

On vérifie que l'intégrale ne dépend pas de la base choisie et on retrouve les propriétés classiques de l'intégrale (linéarité, relation de Chasles, sommes de Riemann, inégalité triangulaire). De plus, pour tous $a, b \in I$,

- $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $F' = f$.
- Si $f : I \to E$ est de classe $\mathscr{C}^1$, $\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a)$.

Proposition : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to E$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. S'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in I$, $\|f'(t)\| \leqslant M$, alors :

$$\forall a, b \in I, \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant M \cdot |b - a|$$

On retrouve également les formules de Taylor.

