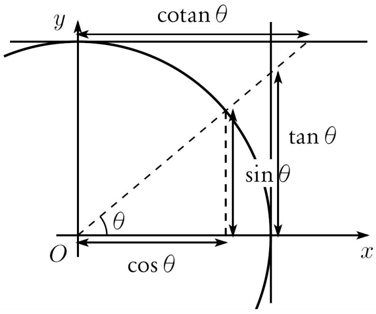
Formulaire MP

Trigonométrie

Définition



$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ et } \operatorname{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Angles opposés

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \cos(-\theta) = -\cos(\pi-\theta)\\
&= -\cos(\pi+\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\sin(\theta) &= -\sin(-\theta) = \sin(\pi-\theta)\\
&= -\sin(\pi+\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
\tan(\theta) &= -\tan(-\theta) = -\tan(\pi-\theta)\\
&= \tan(\pi+\theta) = \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)
\end{aligned}$$

Valeurs remarquables

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Passage polaire/cartésien

$$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{si } x > 0, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{si } x < 0, \quad \theta = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Complexes

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$$

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$$

$$\cos nx + \mathrm{i}\sin nx = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n$$

Angle double

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin 2x = 2\ \cos x\ \sin x \qquad \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Addition des angles

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b\\
\cos(a-b) &= \cos a\ \cos b + \sin a\ \sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a\ \cos b - \cos a\ \sin b\\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\ \tan b}\\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\ \tan b}
\end{aligned}$$

Addition des fonctions

$$\begin{aligned}
\cos a + \cos b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\cos a - \cos b &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\ \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\sin a + \sin b &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\ \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\\
\sin a - \sin b &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$a\cos x + b\sin x = \rho\cos(x-\varphi)$$

$$\text{avec} \quad \rho = \sqrt{a^2+b^2},\ \varphi = \arg(a+\mathrm{i}b)$$

Produit des fonctions

$$\begin{aligned}
\cos a\ \cos b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)+\cos(a+b)\big]\\
\sin a\ \sin b &= \frac{1}{2}\big[\cos(a-b)-\cos(a+b)\big]\\
\sin a\ \cos b &= \frac{1}{2}\big[\sin(a-b)+\sin(a+b)\big]
\end{aligned}$$

Développements limités

Formule de Taylor à l'ordre n

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, avec f de classe au moins $\mathscr{C}^n$ sur I. Soit a et x deux points de I. Il existe alors une fonction ε, $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, telle que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n) \end{aligned}$$

Les développements limités suivants sont tous *au voisinage de 0* :

$$\begin{array}{lrll}
\mathrm{DL}_n & \mathrm{e}^x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) & = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n) \\
\mathrm{DL}_{2n} & \cos x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) & = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \\
\mathrm{DL}_{2n+1} & \sin x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) & = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
\mathrm{DL}_6 & \tan x & = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15} x^5 + \mathrm{o}(x^6) & \\
\mathrm{DL}_{2n+1} & \arctan x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) & = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
\mathrm{DL}_{2n} & \mathrm{ch} x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) & = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \\
\mathrm{DL}_{2n+1} & \mathrm{sh} x & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) & = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
\mathrm{DL}_n & \dfrac{1}{1-x} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n) & = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
\mathrm{DL}_n & \dfrac{1}{1+x} & = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n) & = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n) \\
\mathrm{DL}_n & \ln(1+x) & = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n) & = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} + \mathrm{o}(x^n) \\
\mathrm{DL}_n & (1+x)^\alpha & = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n) & \\
 & & = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \mathrm{o}(x^n) & \\
\mathrm{DL}_2 & \sqrt{1+x} & = 1 + \dfrac{1}{2} x - \dfrac{1}{8} x^2 + \mathrm{o}(x^2) &
\end{array}$$

Limites classiques

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \qquad \frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty \qquad \mathrm{e}^{-x} x^\alpha \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^\alpha \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \qquad \frac{\ln x}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$$

Développements en série entière usuels

Rayon	Domaine	Développement
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$e^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\cos x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R=+\infty$	$\mathbb{R}$	$\sin x=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
$R=1$	$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha=1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad (\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$
$R=1$	$]-1,1[$	$\dfrac{1}{1+x}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$
$R=1$	$]-1,1]$	$\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$
$R=+\infty$	$\mathbb{C}$	$e^z=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$

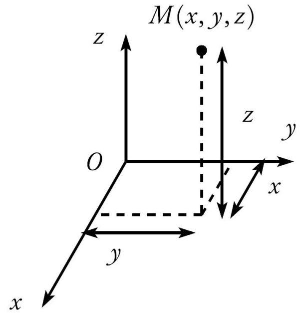
Probabilités

Lois usuelles discrètes

Nom	Notation	$X(\Omega)$	$P(X=k)$	$E(X)$	$V(X)$	$G(t)$
Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$\{0;1\}$	$\begin{cases}p \text{ si } k=1\\ 1-p \text{ si } k=0\end{cases}$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$
Binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$
Uniforme	$\mathscr{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	$\dfrac{t-t^{n+1}}{n(1-t)}$
Géométrique	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1}p$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	$\dfrac{pt}{1-(1-p)t}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$

Systèmes de coordonnées

Coordonnées cartésiennes



Le repère $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$ est orthonormé et direct.
La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z), et alors

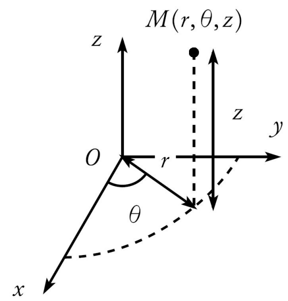
$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{\imath} + y\,\overrightarrow{\jmath} + z\,\overrightarrow{k}$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{\imath} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{\jmath} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{k}$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

Coordonnées cylindriques



La position d'un point M est donnée par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z), avec

$$r \in [0,+\infty[, \quad \theta \in [0,2\pi[\quad z \in \mathbb{R}.$$

On associe au point M le repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{k})$:

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath} \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$

On a alors $\quad \overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{k}$.

Passage des coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes

$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad z = z$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{k}$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$
Les coordonnées cylindriques sont à utiliser quand une direction est privilégiée dans le problème (ce sera la direction (Oz)).

Coordonnées polaires C'est un cas particulier des coordonnées cylindriques $(z=0)$
On associe au point M le repère orthonormé direct plan $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$:

$$\overrightarrow{u_r} = \cos\theta\,\overrightarrow{\imath} + \sin\theta\,\overrightarrow{\jmath} \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta\,\overrightarrow{\imath} + \cos\theta\,\overrightarrow{\jmath}$$

On a alors $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$.

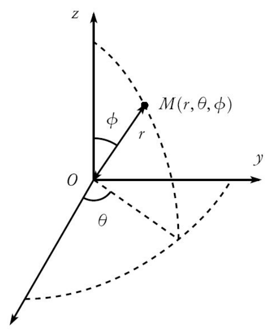
$$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Surface élémentaire : $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

Coordonnées sphériques



La position d'un point M est donnée par ses coordonnées sphériques (r,θ,ϕ), avec $r \in [0,+\infty[$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $\phi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes

$$x = r\cos\theta\sin\phi \quad y = r\sin\theta\sin\phi \quad z = r\cos\phi$$

Déplacement élémentaire :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\sin\phi\,\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\mathrm{d}\phi\overrightarrow{u_\phi}$$

Volume élémentaire : $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$.

Divers

Coefficients binomiaux

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\ ; \quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\ ; \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}\ ; \quad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\ ; \quad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

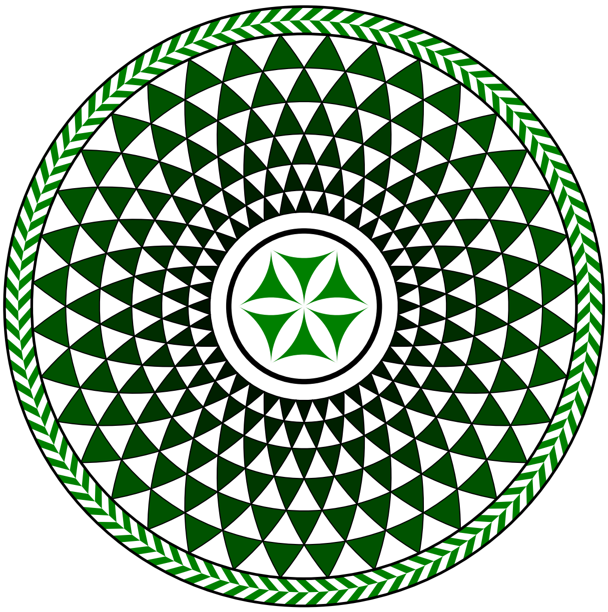
$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéritique $X^2 - aX - b = 0$, de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 :
  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$
- Si $\Delta = 0$, une racine double r :
  $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + n\mu) r^n$
- Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjug. $\rho e^{\pm i\theta}$:
  $\exists \lambda,\ \mu \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$

Alphabet grec

α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	xi *ou* ksi
γ	Γ	gamma	o	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ϵ	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	zêta	σ	Σ	Sigma
η	H	êta	τ	T	Tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	ϕ, φ	Φ	phi
κ	K	kappa	χ	X	chi
λ	Λ	lambda	ψ	Ψ	psi
μ	M	mu	ω	Ω	oméga



MOSAÏQUE ROMAINE – *Casa degli Amorini Dorati (Pompéi)*