17 Intégrales à paramètre

« Quand j'étais jeune, j'espérais démontrer l'hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j'ai encore eu l'espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d'apprendre qu'il en existe une démonstration. »

André Weil

Plan de cours

On appelle intégrale à paramètre une intégrale du type $\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ où $f : I\times J \to \mathbb{R}$.

Nous noterons par la suite g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$. On s'intéresse dans ce chapitre à la régularité de l'application g ainsi définie.

I | Domaine de définition

Tout d'abord, $x \in \mathscr{D}_g \Longleftrightarrow \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ existe. Deux possibilités :

- Si J est un segment et si $t \longmapsto f(x,t)$ est continue alors l'intégrale est bien définie.
- Si J n'est pas un segment et si $t \longmapsto f(x,t)$ est continue, il s'agit d'étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Les résultats suivants feront leur apparition dans le prochain chapitre, nous les admettrons pour le moment.

- Si $f : (x,t) \longmapsto f(x,t)$ est continue sur $I\times J$ alors $x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I pour tout $t \in J$ et $t \longmapsto f(x,t)$ est continue sur J pour tout $x \in I$.
- La réciproque est fausse comme le montre l'exemple : $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Exercice 1

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$g_1 : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+x}\,\mathrm{d}t\ ;\quad g_2 : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}\ ;\quad g_3 : x \longmapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x}$$

II | Continuité sous le signe $\int$

Exercice 2

Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ce dernier exemple montre bien qu'il n'y a aucune raison que la fonction g soit continue malgré la continuité de f par rapport à x.

1 – Théorème de continuité

On a $g(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Quelles hypothèses sur f sont suffisantes pour s'assurer de la continuité de f ?

Théorème 17.1 : Continuité sous le signe $\int$

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I\times J \to \mathbb{K}$ une fonction vérifiant :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
- Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t)\in I\times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

- $\varphi(t)$ ne doit en aucun cas dépendre de x !
- Remarquons que l'existence de l'intégrale découle de l'hypothèse de domination.
- C'est un théorème d'interversion de limites :

$$\lim_{x\to x_0} \int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = \int_J f(x_0,t)\,\mathrm{d}t = \int_J \lim_{x\to x_0} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

  Il découle directement du théorème de convergence dominée (dans sa version continue), tel qu'il a été formulé dans le chapitre « Suites et séries de fonctions ».

Théorème 17.2 : Convergence dominée (extension)

Soit $(f_x)_{x\in I}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle J à valeurs dans $\mathbb{K}$, la famille étant indexée par un intervalle I. Soit également x_0 un point adhérent à I. On suppose que :

- Pour tout $x \in I$, f_x est continue par morceaux sur J.
- Pour tout $t \in J$, $f_x(t) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(t)$ où f est une fonction continue par morceaux sur J.
- Il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant :

$$\forall x\in I, \quad |f_x| \leqslant \varphi$$

Alors, les fonctions f_x et f sont intégrables sur J et $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \int_J f_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_J f(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons que le théorème de continuité reste valable lorsque f est définie sur $A\times J$ où A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie, pour peu que la continuité de $x \mapsto f(x,t)$ sur A soit vérifiée.

Exemple

Soit $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x)$.

- $\mathscr{D}_g = \mathbb{R}$ car l'intégrale est absolument convergente.
- Ici, $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}^+$.
  - ⋆ $x \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
  - ⋆ $\forall (x,t)\in I\times J$, $|f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur J.

  On en déduite que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} g(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

2 – Extension du théorème

Dans certains cas, il n'est pas possible de « dominer » la fonction f sur l'intervalle I tout entier. On peut cependant se contenter de vérifier l'hypothèse de domination sur tout segment K inclus dans I, le théorème précédent s'applique encore.

Théorème 17.3 : Continuité sous le signe $\int$ – extension

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$ telle que :

- Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
- Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J.
- Pour tout segment $K \subset I$, il existe $\varphi_K : J \to \mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times J, \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi_K(t) \quad \text{(hypothèse de domination)}$$

Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Exemple

La fonction Γ d'Euler est définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

❶ Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

- La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- Problèmes en $+\infty$: $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc la fonction est intégrable sur $[1,+\infty[$.
- Problèmes en 0 : $\mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \underset{t\to 0}{\sim} t^{x-1}$ donc la fonction est intégrable sur $]0,1]$ si, et seulement si $1-x<1$ c'est-à-dire si, et seulement si $x>0$.

Donc Γ est définie sur $]0,+\infty[$.

❷ Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
Utilisation du théorème de continuité sous le signe $\int$:

- $x \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Mais impossible de dominer la fonction sur I tout entier.
En effet, si $t<1$ et $x-1>-1$ alors $(x-1)\ln t < -\ln t$ donc,

$$t^{x-1} < t^{-1} \quad \text{et} \quad |\mathrm{e}^{-t} t^{x-1}| < \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$$

Cette dernière majoration est optimale mais la fonction considérée n'est pas intégrable...
Dominons f sur $[a,b]$ où $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a<b$. Si $x \in [a,b]$ alors $a-1 \leqslant x-1 \leqslant b-1$. Ainsi,

$$t^{x-1} \leqslant \begin{cases} t^{a-1} \text{ si } t \leqslant 1 \\ t^{b-1} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

Posons alors :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad \varphi(t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} t^{a-1} \text{ si } t<1 \\ \mathrm{e}^{-t} t^{b-1} \text{ si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

L'application φ est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc Γ est continue sur tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$ donc sur $]0,+\infty[$.

3 – Cas particulier d'une intégrale sur un segment

Lorsque que l'intervalle d'intégration est un segment, sous hypothèse de continuité de f, la fonction g est automatiquement continue.

Si $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[c,d]\times[a,b]$ (fermé borné de $\mathbb{R}^2$) alors f est bornée, *i.e.* :

$$\exists M\geqslant 0,\quad \forall(x,t)\in[c,d]\times[a,b],\quad |f(x,t)|\leqslant M$$

Théorème 17.4

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ continue sur $I\times[a,b]$ avec I intervalle quelconque.

Alors $g:x\mapsto\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Ce théorème doit être redémontré avant chaque utilisation.

Démonstration

- f continue sur $I\times[a,b]$ donc continue par rapport à t et par rapport à x.
- $t\mapsto f(x,t)$ est continue sur le segment $[a,b]$ donc intégrable.
- L'hypothèse de domination est vérifiée au moins sur tout segment $[c,d]\subset I$:

$$\forall(x,t)\in[c,d]\times[a,b],\quad |f(x,t)|\leqslant M_{c,d}=\varphi_{[c,d]}$$

■

Exercice 3

❶ Montrer que $x\mapsto\displaystyle\int_0^1\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

❷ En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ avec $u_n=\displaystyle\int_0^{1/n}\frac{n\cos t}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$.

III | Dérivabilité sous le signe $\int$

Théorème 17.5 : Dérivabilité sous le signe $\int$ (ou théorème de Leibniz)

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I\times J$ telle que :

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable et $t\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur J.
- Il existe $\varphi:J\to\mathbb{R}_+$ continue et intégrable sur J telle que :

$$\forall(x,t)\in I\times J,\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leqslant\varphi(t)$$

Alors $g:x\mapsto\displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et

$$\forall x\in I\quad g'(x)=\int_J\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

- L'hypothèse de domination porte sur $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et non pas f.
- C'est encore un théorème d'interversion de limites.
- On peut se contenter d'une domination sur tout segment inclus dans I.

Exemple

Soit $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt)\,dt$. L'application g est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer g'.
On peut appliquer le théorème précédent car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à chacune de ses variables, l'intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ a déjà été justifié et enfin,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t e^{-t}$$

donc l'hypothèse de domination est vérifiée.
g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} \cos(xt)\,dt$.

Comme dans le paragraphe précédent, si J est un segment, l'hypothèse de domination est automatiquement vérifiée car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $[c,d] \times [a,b]$ donc bornée.

Exercice 4

Montrer que $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(xt)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Retour à la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$. $\mathscr{D}_\Gamma = \mathbb{R}_+^*$

❶ Montrer que Γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer Γ'.
$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln t e^{-t} t^{x-1}$ et même $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \ln^k t e^{-t} t^{x-1}$.

- $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu) et c'est le cas pour $t \mapsto \ln t e^{-t} t^{x-1}$.
  En effet, en $+\infty$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et en 0, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \sim \dfrac{\ln t}{t^{1-x}}$ (intégrale de Bertrand)
- Hypothèse de domination : Soit $\varphi(t) = \begin{cases} \ln t e^{-t} t^{a-1} & \text{si } t < 1 \\ \ln t e^{-t} t^{b-1} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$.
  $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+^*$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. (intégrale de Bertrand)

Donc Γ est dérivable sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} t^{x-1}\,dt$.

❷ Généralisation : Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le même principe de domination.