Intégrales à paramètre

Travaux dirigés #17

Exercice 1 — *Intégrale de Gauss*
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer leurs dérivées.
2. Vérifier que $f + g^2$ est une fonction constante (à déterminer) sur $\mathbb{R}_+$.
3. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant f(x) \leqslant e^{-x^2}$.
4. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Exercice 2 — Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\, dt$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.
4. En déduire une expression de f à l'aide de l'exercice précédent.

Exercice 3 — *Transformée de Fourier*
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ et sa transformée de Fourier :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\, dt$$

1. Démontrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. Soit désormais la fonction $f : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$.
   a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer $\hat{f}'$ puis en déduire $\hat{f}$ en admettant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4 — Pour $x > -1$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\, dt$.

1. Montrer que f est continue sur $I =]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et exprimer $f'(x)$ sous forme intégrale.
3. Calculer explicitement $f'(x)$ à l'aide du changement de variable $u = \tan t$.
   On distinguera les cas $x = 0$ et $x \neq 0$.
4. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour $x > -1$.

Exercice 5 — *Intégrale de Dirichlet*
On pose, pour tout $x \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\, dt$$

1. Montrer que ces deux fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}_+$.
2. Exprimer $\psi(x)$ sous la forme $a(x)\cos(x) + b(x)\sin(x)$ avec $a(x)$ et $b(x)$ définies par des intégrales sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
3. Étudier la continuité de φ et ψ.
4. Démontrer que φ et ψ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \dfrac{1}{x}$.
5. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.

Exercice 6 — *Transformée de Laplace*
Soit f une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
On pose, pour tout $p \geqslant 0$, $L_f(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$.

1. Montrer que L_f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.
2. Déterminer sa limite en $+\infty$.
3. Montrer que L_f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
4. On suppose dorénavant f bornée sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0) \neq 0$.
   a) Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} pe^{-pt}\left[f(t) - f(0)\right] dt \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$.
   b) En déduire le *théorème de la valeur initiale* : $L_f(p) \underset{p\to+\infty}{\sim} \dfrac{f(0)}{p}$.

Exercice 7 — *Fonction* Γ *d'Euler*

Soit la fonction $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que Γ est définie sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que pour $x>0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$; en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
4. Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Gamma^{(n)}(x)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire que la fonction Γ est convexe sur $]0,+\infty[$.
6. Démontrer que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ puis tracer le graphe de Γ.
7. a) Justifier que pour tout $x>0$, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire la *formule de Gauss* :

$$\forall x>0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

Exercice 8 — Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité puis la dérivabilité de f.
3. Déduire de $f'(x)$ une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 9 — On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^2 \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos^n\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t^2/2}$.
3. a) Justifier que pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\theta \leqslant \tan(\theta)$.
   b) En déduire par intégration que pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\cos(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x^2/2}$.
4. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(t) = t^2 \cos^n\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)$ si $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi\sqrt{n}}{2}$; $f_n(t) = 0$ sinon.
   a) Montrer que $I_n = \dfrac{1}{n^{3/2}} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire un équivalent de I_n en $+\infty$.

Exercice 10 — Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_0^1 \sqrt{x+t^3}\,\mathrm{d}t$$

CCINP Exercices : 29, 30 et 50.