3 Intégrales généralisées

« Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir. »
Henri Poincaré (1902)

Plan de cours

♦ Quelques perspectives historiques

La mesure de la longueur d'une courbe et de l'aire d'une surface est un problème essentiel et récurrent chez les Grecs. Mesurer, c'est avant tout comparer des longueurs en calculant leurs rapports. Des méthodes d'exhaustion sont mises en place à cette époque et permettent de répondre avec succès à certains problèmes de recherche d'aires à l'aide d'encadrements successifs. Ces travaux sont repris et développés plus tard par les Arabes puis par d'autres mathématiciens comme Fermat ou Laplace. On peut dire qu'à ce stade, l'intégration, ou plutôt les techniques de quadrature et de rectification, sont avant tout une affaire de géomètres! Newton et Leibniz mettent en place, au cours du XVII^e^ siècle, les fondements du calcul différentiel et intégral à travers l'étude des variations infinitésimales de quantités mathématiques. Ils sont les premiers à faire le lien entre dérivation et intégration. C'est d'ailleurs chez Leibniz que l'on voit apparaître pour la première fois la notation $x = \int \mathrm{d}x$.

Bernhard Riemann

Ces théories ne sont pourtant que des colosses aux pieds d'argile : elles reposent sur des notions mal définies et encore mal comprises comme les nombres ou les fonctions. Mais cela ne nuit guère à l'expansion du calcul infinitésimal au cours des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Les mathématiciens échouent dans un premier temps à définir la véritable nature des infiniment petits qu'ils manipulent mais ils cherchent cependant petit à petit à s'extraire de la géométrie comme base de ce nouveau calcul. Cauchy s'interroge dans son « *Résumé des leçons données à l'École Polytechnique* » (1823) sur l'existence d'une intégrale avant de s'intéresser à ses diverses propriétés. Il y définit sa propre intégrale dans une version relativement proche de celle étudiée en MPSI. C'est également lui qui propose une première démonstration rigoureuse du théorème fondamental du calcul intégral. Que de chemin parcouru!

Riemann développe sa propre théorie de l'intégration qu'il présente en 1854 pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen. Elle présente l'avantage de s'étendre à toute fonction continue, continue par morceaux et plus généralement à toute fonction dite réglée. Échappe cependant à cette théorie toute une batterie de fonctions (l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ par exemple) et la démonstration de certains résultats de convergence s'avère très technique. Les notions de mesure et de tribus voient peu à peu le jour. Les idées novatrices de Lebesgue, présentées au cours de sa thèse en 1902, conduisent à la naissance d'une nouvelle théorie de l'intégration qui porte désormais son nom. Mais l'histoire ne s'arrête pas là... De nouvelles intégrales font tour à tour leur apparition. La recherche est encore active en théorie de l'intégration!

Henri Lebesgue

Théorème 3.1 : Rappels de MPSI

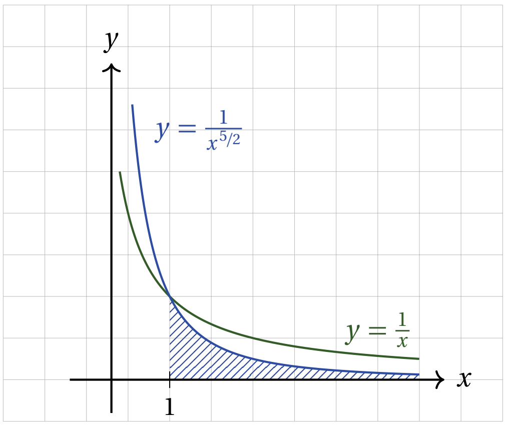
- Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. En particulier, si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
- Si f est continue sur le segment $[a;b]$ alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.
  De plus, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.
- Si f est une fonction continue (par morceaux) sur un segment $[a;b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$,alors,

$$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

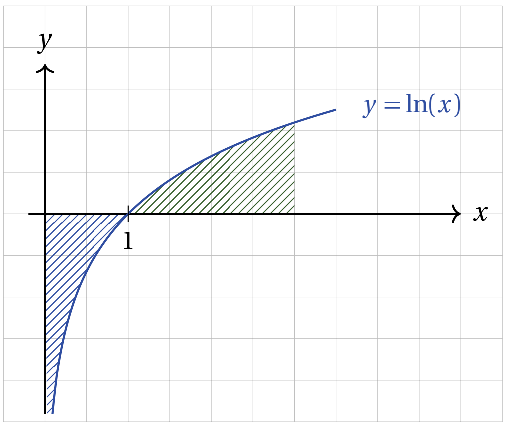
En revanche, toute fonction continue par morceaux sur un intervalle n'admet pas nécessairement de primitive.

I | Intégrales impropres

Comme le lecteur a pu le constater l'an dernier, la notion d'intégrale est intimement liée à la notion d'aire. Ayant toujours pour objectif de « mesurer » l'aire d'un domaine délimité par l'axe des abscisses et une courbe donnée, nous pouvons nous interroger sur la possibilité d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue par morceaux et ses propriétés au cas d'un intervalle non borné. Bien que le domaine ne soit pas borné, l'aire de ce domaine n'est pas nécessairement infinie, comme le prouve le premier des deux exemples suivants !



Fonction bornée sur un intervalle non borné



Fonction non bornée sur un intervalle borné

Quel que soit $a \geqslant 1$,

$$\int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|a| \xrightarrow[a\to+\infty]{} +\infty \qquad \int_1^a \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/2}} = \left[\frac{x^{-3/2}}{-3/2}\right]_1^a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3a\sqrt{a}} \xrightarrow[a\to+\infty]{} \frac{2}{3}$$

On pourra donc poser $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{5/2}} = \frac{2}{3}$.

De même, il est possible de donner un sens à l'intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné. Quel que soit $a \in]0,1]$,

$$\int_a^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_a^1 = a - a\ln(a) - 1 \xrightarrow[a\to0^+]{} -1$$

On peut ainsi donner un sens « géométrique » à $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ alors que $\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ et poser $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

A – Généralités

Toutes les fonctions considérées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Définition sur un intervalle du type $[a,b[$ ou $]a,b]$

Définition 3.2 : Intégrale impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$ (avec $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$) et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers b^-, on dit que l'intégrale impropre converge et on note $\displaystyle\int_a^b f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

Il y a deux types d'intégrales impropres :

- l'intégrale de fonctions non bornées sur un intervalle borné ($x\mapsto \ln x$ sur $]0,1]$) ;
- l'intégrale de fonctions continues sur un intervalle non borné ($x\mapsto \mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,+\infty[$).

On peut étendre la définition précédente au cas $]a,b]$ avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$.

Lorsqu'on connaît une primitive de f sur I, il suffit de calculer l'intégrale sur un segment et passer à la limite pour savoir si l'intégrale converge ou diverge, mais cela est plutôt rare. On notera l'analogie avec l'étude de la nature des séries $\sum k$, $\sum z^k$.

Proposition 3.3 : Intégrale faussement impropre

Si une fonction $f : [a,b[\to\mathbb{R}$ avec $b\in\mathbb{R}$ est continue par morceaux sur $[a,b[$ et prolongeable par continuité en b, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^b \tilde{f}$ où l'on a noté $\tilde{f}$ le prolongement de f.

On pourra alors qualifier une telle intégrale de « faussement » impropre.

Exercice 1

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2 – Intégrales de référence

La nature des quatre intégrales suivante sont à connaître sur le bout des doigts ; ces intégrales sont qualifiées d'« d'intégrales de référence ».

❶ Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$:

L'application $t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Si $\alpha\neq 1$,

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}=\int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha>1\\ +\infty & \text{si } \alpha<1\end{cases}$$

Si $\alpha=1$, $\displaystyle\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et donc :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha>1$$

❷ Nature de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$:

Le même calcul conduit à la propriété suivante :

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$

❸ Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$:

La fonction $t \mapsto \ln t$ est continue sur $]0,1]$ donc il y a un problème en 0.

Comme $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ converge.

❹ Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ avec $\alpha > 0$:

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et :

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\left(1-\mathrm{e}^{-\alpha x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha}$$

Donc pour $\alpha > 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge.

3 – Définition sur un intervalle du type $]a,b[$

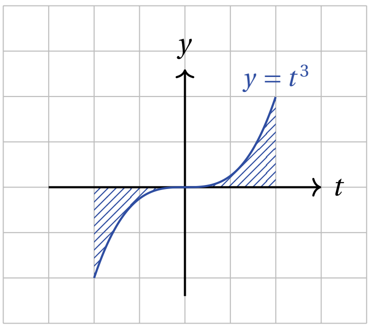
Définition 3.4 : Intégrale impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent quel que soit $c \in]a,b[$.

On étudie alors $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \int_x^c f$ et $\displaystyle\lim_{y\to b^-} \int_c^y f$ pour $c \in]a,b[$.

Attention au passage à la limite ! Pour prouver que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge, il ne suffit pas de calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^{x} f$.

Exemple



On a, par imparité de $t \mapsto t^3$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \int_{-x}^{x} t^3\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-x}^{x} t^3\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Alors que $\displaystyle\int_0^x t^3\,\mathrm{d}t = \frac{x^4}{4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ne converge pour aucune valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par souci de simplicité, nous présenterons les propriétés de l'intégrale pour des intervalles de la forme $[a,b[$.

B – Propriétés

Proposition 3.5 : Linéarité de l'intégrale

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{K}$ continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ convergent alors $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ converge et on a :

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$$

Démonstration

Il suffit d'intégrer sur le segment $[a, x]$ avec $x \in [a, b[$ avant de passer à la limite :

$$\int_a^x (\lambda f + g) = \lambda \int_a^x f + \int_a^x g \quad \text{(linéarité d'une intégrale sur un segment)}$$

$$\xrightarrow[x \to b^-]{} \lambda \int_a^b f + \int_a^b g \in \mathbb{R}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ converge et $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$. ∎

Il faut d'abord s'assurer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge sinon l'écriture $\displaystyle\int_a^b f$ n'a pas de sens dans la formule précédente.

Exemple

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 8t + 15}$?

L'application $x \mapsto \dfrac{1}{t^2 - 8t + 15}$ est continue sur $[6, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Une décomposition en éléments simples nous fournit :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{3, 5\} \qquad \frac{1}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t - 5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t - 3}$$

En intégrant, on obtient alors :

$$\int_6^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x - 5}{x - 3}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{1}{2} \ln 3$$

L'intégrale converge et $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 8t + 15} = \frac{1}{2} \ln 3$. Pourtant, $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t - 5}$ et $\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t - 3}$ divergent !

Attention au résultat suivant :

- si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b (f + g)$ diverge ;
- si $\displaystyle\int_a^b f$ diverge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge alors on ne peut rien dire.

Ex. : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-\mathrm{d}t}{t}$.

Proposition 3.6

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. $\displaystyle\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_I \mathrm{Im}(f)$ convergent si et seulement si $\displaystyle\int_I f$ converge et alors :

$$\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i \int_I \mathrm{Im}(f)$$

Proposition 3.7 : Relation de Chasles

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux telle que $\int_{]a,b[} f$ converge. Alors, pour tout $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Dans le cas d'une fonction positive, pour $a < b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ lorsque l'intégrale converge.

Proposition 3.8

Soit f une fonction *positive* et *continue* sur $[a,b[$. On suppose que $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

$$\int_a^b f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est identiquement nulle sur } [a,b[\quad \Longleftrightarrow \quad \forall t \in [a,b[\ f(t) = 0$$

Attention, ces deux hypothèses sont nécessaires ! L'intégrale d'une fonction continue peut être nulle sans que la fonction soit nulle. De même, l'intégrale d'une fonction positive présentant des discontinuités peut être nulle sans que la fonction soit identiquement nulle.

C – Intégrale impropre d'une fonction positive

On ne peut pas toujours calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ explicitement mais lorsque f est positive, certaines règles permettent d'étudier la nature de l'intégrale. Si f est négative, on travaillera avec $-f$.

L'étude de $\displaystyle\int_a^b f$ est très proche de celle des séries du type $\sum u_n$ avec $u_n \geqslant 0$.

Proposition 3.9

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et positive.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b[\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$$

Démonstration

On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. $\forall x \in [a,b[\ F'(x) = f(x) \geqslant 0$ donc F est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, F admet une limite en b^- qui sera finie si et seulement si F est majorée. ■

1 – Règle de comparaison

Théorème 3.10 : Comparaison

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$.
$\displaystyle\int_I g$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_I f$ converge et alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration

Supposons que $0 \leqslant f \leqslant g$ et que $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Par comparaison : $\forall x \in [a, b[\quad \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \underbrace{\leqslant}_{g \text{ positive}} \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = M$.

$x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc majorée donc converge.

Par passage à la limite, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Corollaire 3.11

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I telles que $0 \leqslant f \leqslant g$. Alors,

$$\int_I f \text{ diverge} \Longrightarrow \int_I g \text{ diverge.}$$

Exercice 2

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$?

Remarquons que cette technique n'est pas valable pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{2+t^3}\,\mathrm{d}t$?

2 – Règle des équivalents

Théorème 3.12 : Équivalents

Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux sur I, de signe constant au voisinage de b, telles que $f(t) \underset{t \to b^-}{\sim} g(t)$. Alors, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Démonstration

Supposons f positive au voisinage de b. Il existe alors $\alpha \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [\alpha, b[\quad \frac{1}{2} g(t) \leqslant f(t) \leqslant \frac{3}{2} g(t)$$

puis on conclut par comparaison. On adapte la preuve dans le cas négatif. ■

Exercice 4

Quelle est la nature de $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$? de $\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$? de $\int_0^1 \frac{\sin(t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$?

On prendra soin de vérifier que l'intégrande est de signe constant au voisinage du point considéré.

3 – Comparaison séries/intégrales

Théorème 3.13 : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$.

Alors la série de terme général $\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.

En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Corollaire 3.14 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

D – Convergence absolue

Définition 3.15 : Convergence absolue

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.

On dit que $\int_a^b f$ est absolument convergente lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 3.16

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Démonstration

- Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. Il suffit de constater que $0 \leqslant f + |f| \leqslant 2|f|$.
- Soit $f : [a,b[\to \mathbb{C}$. On se ramène au cas réel grâce à $0 \leqslant |\mathrm{Re}(f)| \leqslant |f|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(f)| \leqslant |f|$. ■

Définition 3.17 : Semi-convergence

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b[$.

Si $\int_a^b f$ converge et $\int_a^b |f|$ diverge, on dit que $\int_a^b f$ est semi-convergente.

Exemple

Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

- $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. Problème en $+\infty$.

  $\forall x \geqslant 1 \quad \int_1^x \frac{\sin t}{t} = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}$ et cette dernière intégrale converge absolument donc converge. Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

- On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{n\pi} |f|$. Remarquons que $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$. Donc,

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+k\pi}\,\mathrm{d}u \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{(k+1)\pi}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

D'où la divergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t$.

- (variante) $\forall t > 1$, $\dfrac{|\sin t|}{t} \geqslant \dfrac{\sin^2 t}{t} = \dfrac{1-\cos(2t)}{2t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t}$ diverge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t$ converge.

E – Divergence grossière

D'après le chapitre sur les séries numériques, si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De même, a-t-on $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge $\Longrightarrow f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$? La réponse est NON !

Théorème 3.18 : Divergence grossière à l'infini

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

Si f admet une limite non nulle en $+\infty$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.

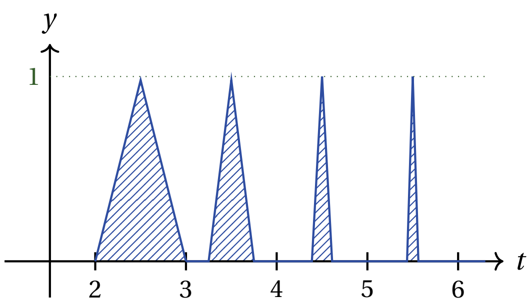
Démonstration

Au voisinage de $+\infty$, la fonction est de signe constant et on peut appliquer la règle des équivalents. ■

Contrairement aux séries, on ne peut rien dire lorsque la limite n'existe pas. En effet, l'intégrale peut converger sans que f admette une limite en $+\infty$.

Exemple

Considérons une fonction « triangulaire par morceaux » dont les triangles sont d'aires $1/n^2$, de hauteur 1, centrés sur le milieu du segment $[n, n+1]$.



On définit plus précisément une fonction *positive* f sur $[2,+\infty[$ par morceaux en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et $x \in [n, n+1[$,

$$f(x) = \begin{cases} n^2\left(x-n-\frac{1}{2}\right)+1 \text{ si } x \in \left[n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n^2}, n+\frac{1}{2}\right] \\ -n^2\left(x-n-\frac{1}{2}\right)-1 \text{ si } x \in \left[n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n^2}\right] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \geqslant 2,\quad \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{\lfloor x\rfloor+1} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

Ainsi, bien que f n'admette pas de limite en $+\infty$, $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Que se passe-t-il ailleurs qu'en $+\infty$?

II | Calcul intégral

A – Intégration par parties

Supposons que $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$. Par intégration par parties, on obtient :

$$\forall x \in [a,b[\quad \int_a^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^x - \int_a^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi, si $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)g(x)$ existe et est finie, alors $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont de même nature.

Par précaution, on commencera par intégrer entre a et x pour effectuer l'intégration par parties sur un segment puis on passera à la limite.

Exercice 5

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge et déterminer sa valeur.

B – Changement de variable

Rappelons le théorème de changement de variable sur un segment vu l'an dernier.

Théorème 3.19 : Changement de variable sur un segment

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux et $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Les choses sont quelque peu différentes lorsque l'on se place sur un intervalle quelconque. La bijectivité de l'application φ est requise !

Théorème 3.20 : Changement de variable sur un intervalle quelconque

Soient f une fonction continue sur $]a,b[$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et en cas de convergence, elles sont égales.

Démonstration

Sous de telles hypothèses, l'application φ réalise donc une bijection de $]\alpha,\beta[$ dans $]a,b[$. Sa bijection réciproque φ^{-1} est également continue et strictement croissante sur $]a,b[$.

- Supposons la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

  Soit $x \in]\alpha,\beta[$ fixé. Posons alors $c = \varphi(x)$. Pour tout $y \in [x,\beta[$, par changement de variable sur le segment $[x,y]$,

$$\int_x^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \underset{t=\varphi(u)}{=} \int_c^{\varphi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Comme φ est une bijection croissante, $\varphi(y) \xrightarrow[y\to\beta]{} b$ donc :

$$\int_x^y f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u \xrightarrow[y\to\beta]{} \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale $\displaystyle\int_x^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut donc $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

De même, l'intégrale $\displaystyle\int_\alpha^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge et vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$.

Au final, on a bien montré que $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ et vaut $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- On montre de même, en utilisant cette fois-ci les propriétés de φ^{-1}, que la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Dans le cas d'une bijection φ décroissante, la formule s'écrit :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme le lecteur l'aura sans doute compris, peu importe la monotonie de φ du moment qu'on prend garde à bien ordonner les bornes des intégrales lors des calculs.

Exercice 6

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$ converge et calculer sa valeur.

III | Fonctions intégrables

A – Définition et propriétés

Définition 3.21 : Fonction intégrable

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que f est intégrable sur I si $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Étudier l'intégrabilité de f sur I revient donc à étudier une intégrale classique sur un segment ou bien à étudier la convergence *absolue* d'une intégrale impropre.

Si f est intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 3.22

Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux et intégrable, alors :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

Démonstration

L'inégalité a bien un sens d'après le commentaire précédent ! Supposons maintenant que $I = [a, b[$ et que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in [a, b[$, $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ et donc, par croissance de l'intégrale,

$$\forall x \in [a, b[\quad -\int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On fait alors tendre x vers b^- pour pouvoir conclure :

$$-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

On admet le résultat dans le cas où f est à valeurs dans $\mathbb{C}$. ■

Proposition 3.23

L'ensemble des fonctions continues par morceaux et intégrables sur I est un espace vectoriel [1].

Démonstration

Montrons pour cela que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0_{pm}(I,\mathbb{K})$.

- La fonction nulle est bien intégrable sur I.
- Soient $f,g : I \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues et intégrables sur I et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\forall t \in I \quad 0 \leqslant |\lambda f(t) + g(t)| \leqslant |\lambda| \cdot |f(t)| + |g(t)|$$

Comme $\displaystyle\int_I |f|$ et $\displaystyle\int_I |g|$ convergent absolument, il en va de même pour $|\lambda f + g|$ par comparaison. ■

B – Comparaison et domination

Lemme 3.24 : Domination

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ deux fonctions continues par morceaux telles que :

$$\forall t \in I \quad |f(t)| \leqslant \varphi(t)$$

Si φ est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

Démonstration

Il s'agit juste de comparer deux fonctions positives. On obtient alors la convergence de $\displaystyle\int_I |f|$. ■

Théorème 3.25 : Règle du petit o et du grand O

Soient $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux. On suppose la fonction g intégrable et positive sur $[a,b[$.

- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{o}(g)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$;
- si $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$.

Démonstration

Supposons tout d'abord que $f(t) \underset{t\to b^-}{=} \mathrm{o}(g(t))$ avec g intégrable sur $[a,b[$. Alors $\dfrac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t\to b^-]{} 0$.

Ainsi, il existe $c \in [a,b[$ tel que :

$$\forall t \in [c,b[\quad \left|\frac{f(t)}{g(t)}\right| \leqslant 1$$

Et donc, pour $t > c$, $|f(t)| \leqslant |g(t)|$. Il n'y a plus qu'à conclure par comparaison.

Le raisonnement est identique dans le cas où $f \underset{b^-}{=} \mathrm{O}(g)$. ■

Le théorème précédent s'adapte facilement au cas d'un intervalle de la forme $]a,b]$.

Corollaire 3.26

Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

Si $f(t) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^\alpha}\right)$ au voisinage de $+\infty$ avec $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge (absolument).

1. Pour les 5/2, il s'agit même d'un espace vectoriel normé une fois muni de $\|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f|$. C'est faux pour $\mathscr{C}_m(I)$.

Exercice 7

Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$?

C – Intégration des relations de comparaison

Les théorèmes qui suivent précisent les résultats précédents et sont l'analogue des sommations de relations de comparaison vues dans le chapitre consacré aux séries numériques.

Théorème 3.27 : Cas des fonctions intégrables

Soient f continue par morceaux sur $[a,b[$ et g supposée positive et intégrable sur $[a,b[$.

- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que lorsque g est intégrable sur $[a,b[$,

$$\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} 0$$

Démontrons seulement le troisième point, l'intégrabilité de f étant par ailleurs déjà acquise.
Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $a' > 0$ tels que pour tout $t \in]a', b[$, $|f(t)| \leqslant M \cdot g(t)$. Pour tout $x > a'$,

$$\left|\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_x^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant M \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Les deux autres points se démontrent de façon similaire. ■

Théorème 3.28 : Cas des fonctions non intégrables

Soient f continue par morceaux sur $[a,b[$ et g supposée positive et non intégrable sur $[a,b[$.

- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{o}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$ alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Démonstration

Remarquons tout d'abord que lorsque g est positive et n'est pas intégrable sur $[a,b[$,

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$$

En effet, dans le cas contraire, G étant croissante, elle admettrait une limite finie. g serait intégrable, absurde !

Prouvons comme dans le cas précédent uniquement le dernier point. Supposons donc que $f(x) \underset{x\to b}{=} \mathrm{O}(g(x))$. Il existe $M \in \mathbb{R}$ et $a' > 0$ tels que pour tout $t \in]a', b[$, $|f(t)| \leqslant M \cdot g(t)$. Pour tout $x > a'$,

$$\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^{a'} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{a'}^x |f(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{a'} |f(t)|\,\mathrm{d}t + M\int_{a'}^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

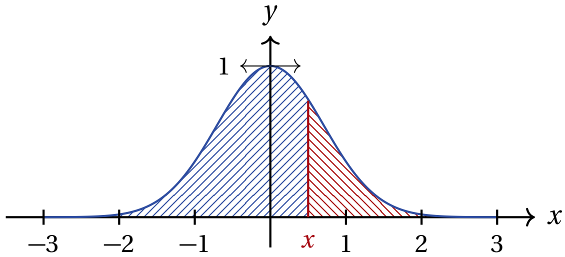
On a ainsi $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \underbrace{\int_a^{a'} \big(|f(t)| - Mg(t)\big)\,\mathrm{d}t}_{\text{cste}/x} + M\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$, il existe $a'' > 0$ tel que pour tout $x > a''$, $\left|\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2M\int_{a'}^x g(t)\,\mathrm{d}t$. ■

Exemple – Développement asymptotique lié à la loi normale

On rappelle que $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1$. Montrons que :

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{4x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x^3}\right)$$



Commençons par obtenir un équivalent de l'intégrale. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Effectuons une intégration par parties sur le segment $[x, y]$, les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$. Il vient :

$$\int_x^y \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_x^y \frac{-1}{2t}\cdot(-2t\mathrm{e}^{-t^2})\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{2t}\cdot\mathrm{e}^{-t^2}\right]_{t=x}^{t=y} - \int_x^y \frac{1}{2t^2}\cdot\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, par croissances comparées,

$$\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

Nous tenons notre équivalent ! En effet, $\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{-t^2})$ et $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ dont le théorème de sommation des relations de comparaison s'applique et on a :

$$\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} = \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{2t^2}\,\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{=} \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$$

On a ainsi prouvé que $\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}$.

On laisse aux lecteurs le soin de compléter pour obtenir un développement asymptotique plus poussé.