

Intégrales généralisées

Travaux dirigés #03

Partie A – Intégrales sur un segment

Exercice 1 — Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé, le cas échéant.

$$A = \int_{-1}^1 \frac{x+1}{x^2+4x+5} dx; \quad B = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2-4x+4} dx; \quad C = \int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+3x+2} dx;$$

$$D = \int_{-2}^1 \frac{-x^3-2x^2+4x+9}{x^2+4x+7} dx; \quad E = \int_2^3 \frac{x^7}{(x^4-1)^2} dx; \quad F = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2(x)};$$

$$G = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2+e^x+e^{-x}}; \quad H = \int_0^1 x \arctan x dx; \quad I = \int_0^1 (x-1)\sqrt{3+2x-x^2} dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{4x} \sin(5x) dx; \quad K = \int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx; \quad L = \int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{1+\cos^2 2x} dx \quad (u = \cos 2x);$$

$$M = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \quad (u = \pi - x); \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}; \quad O = \int_0^1 \frac{\sqrt{2+x}}{1+x} dx$$

Exercice 2 — Déterminer une primitive des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalle(s) de validité :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}; \quad f_2 : x \mapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}; \quad f_3 : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{5+x^3}}; \quad f_4 : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt[4]{(x^3+1)^7}};$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x}{\cos^2(x)}; \quad f_6 : x \mapsto \arctan(x); \quad f_7 : x \mapsto \arcsin(x); \quad f_8 : x \mapsto \ln(1+x^2);$$

$$g_1 : x \mapsto \sin^2 x; \quad g_2 : x \mapsto \cos^2 x; \quad g_3 : x \mapsto \sin^2 x \cos^3 x; \quad g_4 : x \mapsto \sin^4 x \cos^2 x;$$

$$g_5 : x \mapsto \sin(\ln(x)); \quad g_6 : x \mapsto \cos(\ln(x)); \quad g_7 : x \mapsto \sin(2x) \ln(\tan x).$$

Exercice 3 — Calculer $\int_0^1 \left[4x + \frac{1}{2}\right] dx$ et $\int_0^1 \sup(x, (x-1)^2) dx$.

Exercice 4 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} dx$.

- Calculer $I_{n+1} - I_n$ et en déduire la valeur de I_n pour tout n .
- Reprendre la question précédente avec $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nx)}{\sin x} dx$.

Exercice 5 — Soient $I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(x)}{\cos(2x)} dx$ et $J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(x)}{\cos(2x)} dx$.

Déterminer les valeurs de I et J à l'aide de $I - J$ et $I + J$.

Exercice 6 — Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ quand :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}; \quad S_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}; \quad S_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 7 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

- Montrer que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
- Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{1}{(n+1)e} + \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

En déduire un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 — On considère les intégrales $J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x+1} dx$ où $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$ et en déduire J_0 .
- Montrer que, pour $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n}$; en déduire la limite de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Montrer que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire que :

$$\frac{1}{2}(J_n + J_{n+1}) \leq J_n \leq \frac{1}{2}(J_{n-1} + J_n)$$

- Calculer la valeur de $J_n + J_{n+1}$ en fonction de n .
- En déduire un équivalent de J_n en $+\infty$.

Exercice 9 — Soient $a > 0$, $\varphi \in \mathcal{C}^1([-a, a], \mathbb{R})$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_{-a}^a \frac{1 - \cos(nt)}{t} \cdot \varphi(t) dt$$

Montrer que I_n est bien définie et déterminer sa limite.

Exercice 10 — Montrer que :

$$\frac{\pi^2}{16} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + \sin x} dx \leq \frac{\pi^2}{8}$$

Exercice 11 — Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ vérifiant :

$$\forall t \in [a, b], \quad f(a + b - t) = f(t)$$

1. Montrer que $\int_a^b t f(t) dt = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(t) dt$.

2. Application – Calculer $\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$.

Partie B – Intégrales impropres

Exercice 12 — Établir la convergence et calculer la valeur des intégrales suivantes.

$$A = \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2} dt; \quad B = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt; \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt;$$

$$D = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}; \quad E = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}} dt; \quad F = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}};$$

$$G = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt; \quad H = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(at+b)^2}{t^2+t+1} dt; \quad I = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Exercice 13 — Étudier la nature de l'intégrale des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{du}{u - \sqrt{u}}; \quad I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+u^\alpha} du; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{u \sin u}{1+u^2} du;$$

$$I_4 = \int_1^{+\infty} (\sqrt{u^2+1} - u) du; \quad I_5 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{u}\right) du; \quad I_6 = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \text{th}(u)}{u^\alpha} du \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Exercice 14 — Étudier la nature des intégrales impropres suivantes.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3+x+1}} dx; \quad \int_1^{+\infty} (x+1 - \sqrt{x^2+2x}) dx; \quad \int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos(x)}$$

Exercice 15 — Établir la convergence et calculer $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(\omega t) dt$ où $p > 0$.

Exercice 16 — Montrer que pour tout $a > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2} dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\ln(a)}{a}$$

Exercice 17 — Établir la convergence des intégrales et calculer :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt \quad (\alpha > 0) \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

Exercice 18 — Soit $\alpha \in]0, 1[$. Préciser la nature des intégrales :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx; \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx; \quad K = \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right) dx$$

🚲 **Exercice 19** — *Intégrales de Bertrand*

Soit $a > 1$. Pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ l'intégrale suivante converge-t-elle?

$$I_{\alpha, \beta} = \int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \ln^\beta t}$$

Exercice 20 — On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$.

1. Justifier l'existence de I ainsi que de J .

2. Prouver que $I = J$ puis calculer $I + J$. En déduire la valeur de I .

Exercice 21 — Soit $f \in \mathcal{C}([1, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.


Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

Exercice 22 — Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que :

$$\int_a^b \frac{e^{-xt}}{t} dt = \ln \frac{b}{a} + \int_0^x \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du.$$

2. En déduire la convergence et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu} - e^{-au}}{u} du$.

 **Exercice 23** — Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $a < b$ et $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$.

2. On suppose que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$.

3. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx$.

Exercice 24 — On pose pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

2. Montrer que $f(x) + \ln(x)$ a une limite finie lorsque $x \rightarrow 0^+$.

3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\cos x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^{5/2}}\right)$$

4. On pose $I = \int_0^{+\infty} xf(x) dx$. Prouver que l'intégrale converge et calculer I .

Exercice 25 — Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{it^2} dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1 - e^{ix^2}}{2ix} + \frac{1}{2i} \int_x^{+\infty} \frac{1 - e^{it^2}}{t^2} dt$$

2. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 26 — Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que φ est définie, strictement croissante et positive sur \mathbb{R}_+^* .

2. Soit $I = [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \in I$.

a) Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$0 \leq |e^{-xt} - e^{-yt}| \leq |x - y|te^{-at}$$

b) En déduire que φ est lipschitzienne sur I et continue sur \mathbb{R}_+^* .

3. Montrer que $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln(x)$ et $\varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Exercice 27 — Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que f possède deux limites ℓ et ℓ' en $\pm\infty$. Justifier l'existence et calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} (f(t+1) - f(t)) dt$$

Exercice 28 — On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \int_{-x}^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}} dt$.

1. Montrer que pour tout $u \in [0, 1]$,

$$\left| \sqrt{1+u} - 1 - \frac{u}{2} \right| \leq \frac{u^2}{8}$$

2. En déduire le développement limité à deux termes de $\psi(x)$.

On pourra poser $t = xu$.