Espaces préhilbertiens réels

Travaux dirigés #12

Exercice 1 — Montrer que les applications suivantes définissent un produit scalaire sur E :

1. $(P,Q) \mapsto \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ avec $E = \mathbb{R}_n[X]$ $(n \in \mathbb{N})$.
2. $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$ avec $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$.
3. $(f,g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ avec $E = \mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R})$.

Exercice 2 — Soient E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $(e_1,\dots,e_n) \in E^n$ tels que :

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1,n]\!], & \|e_i\| = 1 \\ \forall x \in E, & \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2. \end{cases}$$

Démontrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 3 — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leqslant \sqrt{2^n(n+1)}$.

Exercice 4 — Soient E un espace préhilbertien réel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Montrer que si E est euclidien, $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Exercice 5 — Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^3$, on pose :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x+y\}$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Exercice 6 — On munit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et on considère le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ d'équations :

$$\begin{cases} x+y+z+t = 0 \\ x+2y+3z+4t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de F ainsi que de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la proj. orthogonale sur F.
3. Pour tout $u \in E$, déterminer $d(u,F)$.

Exercice 7 — Soient E un espace préhilbertien réel et deux vecteurs $a, x \in E$ avec a non nul. On considère la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(a)$ et son orthogonal $H = D^\perp$. Exprimer $d(x,D)$ et $d(x,H)$ en fonction de $\|x\|$ et $(x|a)$.

Exercice 8 — On munit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On pose $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.
2. Montrer que $(\mathscr{C}^1([0,1];\mathbb{R}))^\perp = \{0\}$.

Exercice 9 — Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'égalité $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur F et calculer $d(X^3,F)$.

Exercice 10 — On cherche à calculer $I = \displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (\mathrm{e}^{-t} - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

On munit pour cela $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f,g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = d(\varphi,F)^2$ pour une certaine application $\varphi \in \mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ et un certain sous-espace vectoriel F de $\mathscr{C}([0,1];\mathbb{R})$ à préciser.
2. Déterminer le projeté orthogonal de φ sur F et en déduire I.

Exercice 11 — Déterminer comme dans l'exercice précédent :

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^\pi (a\sin x + b\cos x - x)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} (x^3 + ax^2 + bx + c)^2 \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 12 — Pour deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \mathrm{Tr}(A^T B)$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'espace des matrices symétriques (resp. antisymétriques).

1. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que la somme directe est orthogonale.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice M sur l'espace des matrices antisymétriques.
4. Montrer que $d(M, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\|M - M^T\|$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $d(M, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 — Soit E un espace préhilbertien réel et p un projecteur de E. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|.$$

Exercice 14 — *Polynômes de Tchebychev*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

   On vérifiera que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n.
3. Soit $E = \mathscr{C}([-1,1], \mathbb{R})$.
   a) Montrer que l'application suivante définit un produit scalaire sur E :

$$\varphi : (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

   b) On pose $P_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ et pour tout $n > 0$, $P_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_n$.
   Montrer que $(P_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ forme une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   c) Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\sum_{k=0}^{n} a_k T_k$ sa projection orthogonale sur $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que la série de terme général a_n^2 converge.

Exercice 15 — Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire :

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = (P|Q)$$

1. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, soit le polynôme $P_k = \left[(X^2-1)^k\right]^{(k)}$.
   a) Quel est le degré de P_k ?
   b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthogonale de E.
2. Montrer que le polynôme P_k vérifie l'équation différentielle :

$$(X^2-1)P_k'' + 2XP_k' - k(k+1)P_k = 0$$

3. Calculer $\|P_k\|^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.
4. On note $\mathscr{E}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n normalisés, c'est-à-dire de coefficient dominant 1. Calculer $\mu = \min_{P \in \mathscr{E}_n} \int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 16 — *Déterminant de Gram*
Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, on note :

$$A = ((x_i|x_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad G(x_1, \ldots, x_n) = \det(A)$$

On appelle A et $G(x_1, \ldots, x_n)$ respectivement matrice et déterminant de Gram.

1. On suppose que E est un espace euclidien de dimension n.
   a) Exprimer A en fonction de la matrice M des coordonnées de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ dans une base orthonormale de E.
   b) Montrer que le rang de A est égal au rang de $(x_1, \ldots, x_n)$.
2. a) Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée ssi $G(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
   b) Montrer que $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre ssi $G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
   c) En déduire une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre, on note $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer que :

$$\forall x \in E, \quad d^2(x, F) = \frac{G(x, x_1, \ldots, x_n)}{G(x_1, \ldots, x_n)}$$

4. Démontrer par récurrence l'inégalité d'Hadamard :

$$\forall (x_1,\dots,x_n) \in E^n,\ G(x_1,\dots,x_n) \leqslant \|x_1\|^2 \cdots \|x_n\|^2.$$

   Étudier le cas d'égalité.

5. Montrer que $\varphi : (a_1,\dots,a_n) \mapsto \displaystyle\int_0^1 (1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2 \,\mathrm{d}x$ définie sur $\mathbb{R}^n$ atteint un minimum en un unique point et déterminer ce minimum.

Exercice 17 — *Résolution approchée d'un système linéaire*
Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On cherche à résoudre l'équation $AX = B$ où $X = \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ de leur structure euclidienne canonique et on considère $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ (resp. b) l'application (resp. le vecteur) canoniquement associée à A (resp. B).

1. Que peut-on dire lorsque $b \in \operatorname{Im} f$?
   En déduire la valeur de $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^p} \|f(x)-b\|$.
2. On suppose dorénavant que $b \notin \operatorname{Im} f$ et on cherche à trouver $x \in \mathbb{R}^p$ minimisant la quantité $\|f(x)-b\|$.
   a) Montrer que ce problème de minimisation admet au moins une solution x_0 caractérisée par la condition $f(x_0)-b \in (\operatorname{Im} f)^\perp$.
   b) Montrer que la condition précédente équivaut matriciellement à la condition ${}^tAAX_0 = {}^tAB$.
   c) Si on suppose ${}^tAA$ inversible, exprimer X_0.
   d) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est inversible si et seulement si f est injective.
3. Résoudre de façon approchée le système :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \\ 2x+y=2 \end{cases}$$

$\boxed{\texttt{CCINP}}$ Exercices 76, 77, 79, 80, 81, 82, 92.