Moments d'une variable aléatoire

Feuille d'exercices #13

Partie A – Espérance, variance et covariance

Exercice 1 — Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $1/(X+1)$.

Exercice 2 — Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $Y_n = \min\{X_1,\dots,X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1,\dots,X_n\}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$.
2. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 — Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1,\dots,X_n)$.
Déterminer la loi de Y puis montrer que $\mathbf{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Exercice 4 — Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs entières telles que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X=m, Y=n) = p^2 q^{m+n}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Calculer $\mathbf{E}(X+Y)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On note $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.
3. Donner la loi de U et calculer son espérance.
4. Calculer $\mathbf{E}(|X-Y|)$.
5. Déterminer la loi de V.
6. Déterminer la loi de (X,U) et retrouver la loi de U.
7. Déterminer $\mathbf{P}(X+Y=m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires réelles discrètes centrées réduites i.i.d. et M la matrice $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
On pose $D = \det(M)$. Calculer $\mathbf{E}(D)$ et $\mathbf{V}(D)$.

Exercice 6 — Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d, de loi donnée par $\mathbf{P}(X_n=-1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1-p$ avec $p \in]0,1[$.
On pose $Y_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} X_k$, $a_n = \mathbf{P}(Y_n = -1)$ et $b_n = \mathbf{P}(Y_n = 1)$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n\end{bmatrix}$.
2. Exprimer a_n en fonction de n et p.
3. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$ et $\operatorname{cov}(Y_n, Y_{n+1})$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbf{E}(Y_n)$.

Exercice 7 — On considère une succession de n épreuves indépendantes, chaque épreuve conduisant à k résultats possibles noté $r_1,\dots,r_k$.
Soit p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. On note, pour $i \in [\![1,k]\!]$, X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1. Montrer que $\mathbf{V}(X_1+\dots+X_k) = 0$.
2. Préciser la loi de X_i, son espérance et sa variance pour $i \in [\![1,k]\!]$.
3. Donner de même la loi et la variance de la variable $X_i + X_j$.
   En déduire $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$ pour $i,j \in [\![1,k]\!]$.
4. Retrouver alors le résultat de la première question.

Exercice 8 — *Espérance conditionnelle*
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence :

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x|A)$$

1. Montrer que si X admet une espérance finie, alors $\mathbf{E}(X|A)$ est bien définie.
   Prouver alors que $\mathbf{E}_A(X) = \dfrac{\mathbf{E}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbf{P}(A)}$.
2. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ où $p \in]0,1[$, calculer $\mathbf{E}(X|X>m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbf{P}(A_k)\mathbf{E}(X|A_k)$.

Exercice 9 — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.
Soit $T = \min\{n\in\mathbb{N}^*\,;\, X_n = 1, X_{n+1} = 0\}$.

1. Déterminer la loi de T puis calculer $\mathbf{E}(T)$ et $\mathbf{V}(T)$.
2. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(T = n | X_k = 1)$.

Exercice 10 — *Nombre de points fixes d'une permutation*
On munit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ et pour $k\in[\![1,n]\!]$, $X_k(\omega) = 1$ si k est un point fixe de ω, 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_k.
2. Calculer $\operatorname{cov}(X_i, X_j)$ pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$.
3. Exprimer N en fonction des variables X_k et calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

Exercice 11 — Une grenouille monte les $2n$ marches d'un escalier en sautant de façon équiprobable une marche ou deux. On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts et Y_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche.

1. Donner la loi de Y_n. En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.
2. On note Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche.
   a) Exprimer la probabilité $\mathbf{P}(Z_n = k)$ pour $n > 1$ et $k\geqslant 1$.
   b) En déduire que $\mathbf{E}(Z_n) = \dfrac{1}{2}\cdot\mathbf{E}(Z_{n-1}) + \dfrac{1}{2}\cdot\mathbf{E}(Z_{n-2}) + 1$.
3. Déterminer a pour que la suite de terme général $u_n = \mathbf{E}(Z_n) - na$ soit récurrente linéaire d'ordre 2.
4. Calculer l'espérance de Z_n puis en donner un équivalent ; interpréter.

Exercice 12 — Soit $\alpha > 0$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires vérifiant $X_0 = 0$ et, pour tous $n, m\in\mathbb{N}$ avec $n\leqslant m$, $X_m - X_n$ suit la loi de Poisson $\mathscr{P}(\alpha(m-n))$, et est supposée de plus indépendante de X_n.

1. Calculer $\mathbf{E}(X_n(X_m - X_n))$ et en déduire la covariance de X_n et X_m.
2. Donner la loi du couple (X_n, X_m).
3. Déterminer la loi de X_m sachant $X_n = k$.
4. Donner enfin la loi de $N = \min\limits_{k\in\mathbb{N}}\{X_k\geqslant 1\}$.

Exercice 13 — Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant un moment d'ordre 2.
Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(X<k)$. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

Exercice 14 — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et identiquement distribuées.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note R_n le cardinal de $\{X_k\,;\, 1\leqslant k\leqslant n\}$.

1. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{N}$, $\mathbf{E}(R_n)\leqslant a + n\mathbf{P}(X_1\geqslant a)$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(R_n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n)$.

Partie B – Fonctions génératrices et moments d'ordre supérieur

Exercice 15 — Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que :

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(X = k) = ak^2\frac{\lambda^k}{k!}\quad\text{avec}\quad (\lambda, a)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$$

1. Sous réserve d'existence, quelle est la fonction génératrice associée à X ?
2. En déduire la valeur de a puis l'espérance de X.

Exercice 16 — Soit X une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est :

$$\forall s\in\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[,\quad g_X(s) = \frac{s}{2-s^2}$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{X+1}{2}$ et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 17 — On lance indéfiniment une pièce équilibrée, et on note T la variable aléatoire égale au rang de la première apparition du motif `PF`.

1. Déterminer la loi de T.
2. Déterminer la fonction génératrice de T.
3. Calculer l'espérance et la variance de T.

Exercice 18 — *Loi de Pascal*

1. Calculer $\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$ pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1,1]$.
2. On dispose d'une urne remplie de boules blanches et rouges. On procède à une infinité de tirages indépendants avec remise. On tire une boule blanche avec la probabilité p. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et X le temps d'apparition, fini ou infini, de la k-ième boule blanche. Donner la loi de X, sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

Exercice 19 — *Formule de Wald*

Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes identiquement distribuées, toutes supposées indépendantes.

On pose alors $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

1. Montrer que S_N est une variable aléatoire discrète.
2. On suppose que $X_1, N \in L^1$. Prouver que $S_N \in L^1$ et :
$$\mathbf{E}(|S_N|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}\left(|S_N| \cdot \mathbb{1}_{[N=n]}\right) \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N) \cdot \mathbf{E}(X_1)$$
3. On suppose que les variables X_n sont également à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Prouver que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ où l'on G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

Exercice 20 — Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ et N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose les variables mutuellement indépendantes.

On pose $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ et $T = N - S$.

1. Exprimer, pour $(x,y) \in [-1,1]^2$, $G(x,y) = \mathbf{E}(x^S y^T)$ à l'aide de la fonction génératrice de N.
2. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables S et T sont indépendantes.
3. Réciproquement, prouver que si S et T sont indépendantes, alors N suit une loi de Poisson.

Exercice 21 — *Urnes d'Ehrenfest*

Soient deux urnes A et B comportant r boules pour la $1^{\text{ère}}$ et $2n-r$ pour la 2^{nde}. Un tirage consiste à choisir aléatoirement une boule et à la déplacer dans l'autre urne. On note X_k le nombre de boules contenues dans l'urne A à l'issue de k tirages.

1. Donner la loi de X_1, son espérance et sa variance.
2. Exprimer une relation entre les lois de X_{k+1} et X_k.
3. On note G_k la fonction génératrice de la variable X_k. Prouver que :
$$G_{k+1}(t) = tG_k(t) + \frac{1-t^2}{2n} G_k'(t)$$
4. En déduire $\lim_{k\to+\infty} \mathbf{E}(X_k)$ et interpréter.

Exercice 22 — *Fonction caractéristique*

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa fonction caractéristique ϕ_X par $\phi_X(t) = \mathbf{E}\left(e^{itX}\right)$.

1. Montrer que la fonction ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
2. Déterminer les fonctions caractéristiques de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètres (n,p), une loi géométrique de paramètre p et une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$.
En calculant $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t) e^{-ikt}\, dt$, prouver que X et Y ont même loi.
4. On suppose X d'espérance finie. Montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\phi_X'(0)$. Donner le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\phi_X(t)$.

Exercice 23 — *Transformée de Laplace d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle transformée de Laplace de X l'application $L_X : t \mapsto \mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$.

1. On suppose dans cette question que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer $L_X(t)$.
2. On suppose que la fonction L_X est définie sur un intervalle $I =]-a, a[$. Montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(X^n) = L_X^{(n)}(0)$$

Partie C – Inégalités probabilistes

Exercice 24 — Une pièce truquée donne *pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$. On la lance n fois et on note F_n la fréquence d'obtention d'un *pile*.

1. Montrer que $\mathbf{V}(F_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
2. Donner une condition suffisante sur n pour que $\mathbf{P}\left(|F_n - p| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant 0{,}05$.

Exercice 25 — Soit X une variable aléatoire réelle centrée admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathbf{E}(|X|) \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Exercice 26 —

1. Soient X une variable aléatoire réelle et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ supposée strictement croissante. Montrer que pour tout $a > 0$,
$$\mathbf{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbf{E}\left(f(|X|)\right)}{f(a)}$$
2. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$,
$$\mathbf{P}\left(\frac{X}{n} - p > \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{\lambda(X - np - n\varepsilon)}\right)$$

Exercice 27 — Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. Calculer la variance de Z_n.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 28 — *Inégalité de Jensen*
Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, de dérivée croissante et X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant f'(\mathbf{E}(X))(x - \mathbf{E}(X)) + f(\mathbf{E}(X))$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(f(X)) \geqslant f(\mathbf{E}(X))$.

Exercice 29 — *Inégalité de Chernov et marche aléatoire symétrique*
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, telles que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) = \mathrm{ch}^n(t)$ puis que $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right) \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$$
3. Montrer enfin que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(\dfrac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

   Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 30 — *Loi forte des grands nombres pour des lois de Poisson*
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathbf{P}(S_n \geqslant n(\lambda + \varepsilon)) \leqslant \mathrm{e}^{-n\alpha}$.
   On appliquera l'inégalité de Markov à la variable e^{tS_n} pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Prouver alors l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, de $C, \delta > 0$ tels que :
$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant C\mathrm{e}^{-n\delta}$$
   En déduire la convergence de $\sum \mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \lambda\right| \geqslant \varepsilon\right)$.