Moments d'une variable aléatoire

Feuille d'exercices #11

Partie A – Espérance, variance et covariance

⋆ **Exercice 1 —** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X=n) = \frac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$$

1. Déterminer λ puis prouver que $X \in L^1$. Calculer $\mathbf{E}(X)$.
2. La variable X admet-elle une variance ?

⋆ **Exercice 2 —** Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de $1/(X+1)$.

⋆⋆ **Exercice 3 —** Soient $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
On pose, pour tout $n \geqslant 1$, $Y_n = \min\{X_1,\dots,X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1,\dots,X_n\}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(Y_n)$.
2. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(Z_n)$ quand $n \to +\infty$.

⋆ **Exercice 4 —** Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1,\dots,X_n)$.
Déterminer la loi de Y puis montrer que $\mathbf{E}(Y) = n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

⋆ **Exercice 5 —** Soient X_λ une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $Z_\lambda = \dfrac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbf{E}\big(\exp(itZ_\lambda)\big)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

⋆⋆ **Exercice 6 —** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une famille $(X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de variables aléatoires réelles d'espérances finies i.i.d. et la matrice $M = (X_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la valeur de $\mathbf{E}(\chi_M(\lambda))$.

⋆ **Exercice 7 —** Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs entières telles que, pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(X=m, Y=n) = p^2 q^{m+n}$.

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y. Calculer $\mathbf{E}(X+Y)$.
2. Calculer $\mathbf{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. On note $U = \max(X,Y)$ et $V = \min(X,Y)$.
3. Donner la loi de U et calculer son espérance.
4. Calculer $\mathbf{E}(|X-Y|)$.
5. Déterminer la loi de V.
6. Déterminer la loi de (X,U) et retrouver la loi de U.
7. Déterminer $\mathbf{P}(X+Y=m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.

⋆ **Exercice 8 —** On considère une succession de n épreuves indépendantes, conduisant chacune à k résultats possibles notés $r_1,\dots,r_k$. Soit p_i la probabilité de réalisation du résultat r_i lors d'une épreuve donnée. On note, pour $i \in [\![1,k]\!]$, X_i le nombre de réalisations du résultat r_i au cours des n épreuves.

1. Montrer que $\mathbf{V}(X_1+\cdots+X_k) = 0$.
2. Préciser la loi de X_i, son espérance et sa variance pour $i \in [\![1,k]\!]$.
3. Donner de même la loi et la variance de la variable $X_i + X_j$.
   En déduire $\operatorname{cov}(X_i,X_j)$ pour $i,j \in [\![1,k]\!]$.
4. Retrouver alors le résultat de la première question.

⋆ **Exercice 9 —** *Espérance conditionnelle*
Soit X une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$. Si A est un événement non négligeable, on définit, sous réserve d'existence :

$$\mathbf{E}(X|A) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x|A)$$

1. Montrer que si X admet une espérance finie, alors $\mathbf{E}(X|A)$ est bien définie.
2. Prouver alors que $\mathbf{E}(X|A) = \dfrac{\mathbf{E}(\mathbb{1}_A X)}{\mathbf{P}(A)}$.
3. Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ où $p \in]0,1[$, calculer $\mathbf{E}(X|X>m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si X est d'espérance finie, alors $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_k)\mathbf{E}(X|A_k)$.

⋆⋆ **Exercice 10 —** Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et on pose $M = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\},\ S_n \geqslant m\}$. On pose $q = 1-p$.

1. Montrer que M est une variable aléatoire réelle et évaluer $\mathbf{P}(M = +\infty)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(M \geqslant n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}$.
3. Montrer que M est d'espérance finie et la calculer.
4. Calculer la variance de M.

⋆ **Exercice 11 —** Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ telles que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y=k)$ est la loi uniforme sur $[\![0,k]\!]$.

1. Déterminer la loi de (X,Y) puis la loi de X, en fonction de celle de Y.
2. Calculer l'espérance de X en fonction de celle de Y.

⋆⋆ **Exercice 12 —** Soit (U,V) un couple de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi binomiale $\mathscr{B}(2,1/2)$.

1. Déterminer la loi de $S = (U-1)^2 + (V-1)^2$ et préciser son écart-type.
2. Soit $T = (U-1)(V-1)$. Calculer $\mathbf{E}(S(T-1))$, déterminer la loi de T et calculer $\mathrm{cov}(S,T)$.
3. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

⋆⋆ **Exercice 13 —** *Nombre de points fixes d'une permutation*
On munit l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $[\![1,n]\!]$ de la probabilité uniforme. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $N(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ et pour $k \in [\![1,n]\!]$, $X_k(\sigma) = 1$ si k est un point fixe de σ, 0 sinon.

1. Donner l'espérance et la variance de X_k.
2. Calculer $\mathrm{cov}(X_i,X_j)$ pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
3. Exprimer N en fonction des variables X_k et calculer $\mathbf{E}(N)$ et $\mathbf{V}(N)$.

⋆⋆ **Exercice 14 —** Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant un moment d'ordre 2.
Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X<k)$. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

⋆⋆ **Exercice 15 —** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, X_n suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/n$.
Soit $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*;\ X_n = 1, X_{n+1} = 0\}$.

1. Déterminer la loi de T puis calculer $\mathbf{E}(T)$ et $\mathbf{V}(T)$.
2. Pour $k, n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbf{P}(T = n | X_k = 1)$.

⋆⋆ **Exercice 16 —** Soient $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n>\lambda}$ une suite de v.a.r. telle que $X_n \sim \mathscr{G}(\lambda/n)$.

1. Calculer, pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n/n \leqslant x)$.
2. Déterminer f telle que pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{E}(X_n)}{n}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathbf{E}(X_n^2)}{n^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Soit Y une v.a. réelle telle que $\mathbf{P}(Y=k) = F(k+1) - F(k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{E}(Y^2)$.

⋆⋆ **Exercice 17 —** On considère une variable aléatoire X et une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbf{P})$, toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On suppose que :

- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{P}(X=k)$;
- il existe $Y \in L^1$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|X_n| \leqslant Y$.

Montrer que X est d'espérance finie puis prouver que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$|\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X_n)| \leqslant \sum_{k=-p}^{p} |k| \cdot |\mathbf{P}(X_n = k) - \mathbf{P}(X=k)| + 2\sum_{k=p+1}^{+\infty} k\mathbf{P}(Y=k)$$

En déduire que $\mathbf{E}(X_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbf{E}(X)$.

Partie B – Fonctions génératrices et moments d'ordre supérieur

⋆ **Exercice 18 —** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est définie par $g_X(s) = \dfrac{s}{2-s^2}$ pour tout $s \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$.

1. Déterminer la loi de X.
2. Reconnaître la loi de $Y = \dfrac{X+1}{2}$ et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

⋆ **Exercice 19 —** Soit X une v.a.r. définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = k) = ak^2 \dfrac{\lambda^k}{k!}$, où $\lambda > 0$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. Sous réserve d'existence, quelle est la fonction génératrice associée à X ?
2. En déduire la valeur de a puis l'espérance de X.

⋆ **Exercice 20 —** *Loi de Pascal*

1. Calculer $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^{k-r}$ pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 1]$.
2. On dispose d'une urne remplie de boules blanches et rouges. On procède à une infinité de tirages indépendants avec remise. On tire une boule blanche avec la probabilité p. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et X le temps d'apparition de la k-ième boule blanche. Donner la loi de X, sa fonction génératrice, $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

⋆⋆ **Exercice 21 —** Soient $n \geqslant 1$ et $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![n, +\infty[\![$ vérifiant, pour tout $k \geqslant n$, $\mathbf{P}(X = k) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ et une famille $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ de variables i.i.d. suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. À l'aide d'une fonction génératrice, donner la loi de $Y = X_1 + \cdots + X_n$.
2. En déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

⋆⋆ **Exercice 22 —** *Marche aléatoire et probabilité de retour à l'origine*

Soient $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Une particule, initialement en 0, se déplace sur l'axe $\mathbb{Z}$. Elle a à chaque instant une probabilité p d'aller à droite et q d'aller à gauche. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note a_n la probabilité d'être en 0 à l'instant n. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note b_n la probabilité d'être pour la première fois de retour en 0 à l'instant n.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \binom{2n}{n} p^n q^n$ diverge si, et seulement si, $p = q = \frac{1}{2}$.
2. Soient $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $g : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n t^n$. Prouver que f et g sont définies sur $[0, 1[$ puis montrer que pour tout $t \in [0, 1[$, $f(t) = 1 + f(t)g(t)$.
3. Exprimer a_{2n} et a_{2n+1} en fonction de p, q et n. En déduire que pour tout $t \in [0, 1[$, $f(t) = \left(1 - 4pqt^2\right)^{-1/2}$ puis exprimer $g(t)$.
4. Montrer que la probabilité de retour à l'origine vaut $1 - |p - q|$.

⋆⋆⋆ **Exercice 23 —** *Formule de Wald*

Soient N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes identiquement distribuées, toutes supposées indépendantes.

On pose alors $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$.

1. Montrer que S_N est une variable aléatoire discrète.
2. On suppose que $X_1, N \in L^1$. Prouver que $S_N \in L^1$ et :
$$\mathbf{E}(|S_N|) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{E}\left(|S_N| \cdot \mathbb{1}_{[N=n]}\right) \quad \text{puis} \quad \mathbf{E}(S_N) = \mathbf{E}(N) \cdot \mathbf{E}(X_1)$$
3. On suppose que les variables X_n sont également à valeurs dans $\mathbb{N}$. Prouver que $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ où l'on note G_X la fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

⋆ **Exercice 24 —** *Fonction caractéristique*

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit sa fonction caractéristique ϕ_X par $\phi_X(t) = \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{itX}\right)$.

1. Montrer que la fonction ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique.
2. Déterminer les fonctions caractéristiques de X pour $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$ et $\lambda > 0$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $\phi_X = \phi_Y$. En calculant $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi_X(t)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t$, prouver que X et Y ont même loi.
4. On suppose X d'espérance finie. Montrer que ϕ_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $\phi_X'(0)$. Donner le $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\phi_X(t)$.

⋆⋆ **Exercice 25 —** *Transformée de Laplace d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle transformée de Laplace de X l'application $L_X : t \mapsto \mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$.

1. On suppose dans cette question que $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, avec $\lambda > 0$. Calculer $L_X(t)$.
2. On suppose que la fonction L_X est définie sur un intervalle $I =]-a, a[$. Montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{E}(X^n) = L_X^{(n)}(0)$$

Partie C – Inégalités probabilistes

⋆ **Exercice 26 —** Une pièce truquée donne *pile* avec la probabilité $p \in]0,1[$. On la lance n fois et on note F_n la fréquence d'obtention d'un *pile*.

1. Montrer que $\mathbf{V}(F_n) \leqslant \dfrac{1}{4n}$.
2. Donner une condition suffisante sur n pour que $\mathbf{P}\left(|F_n - p| \geqslant 10^{-2}\right) \leqslant 0{,}05$.

⋆ **Exercice 27 —** Soit X une variable aléatoire réelle centrée admettant un moment d'ordre 2. Montrer que $\mathbf{E}(|X|) \leqslant \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

⋆ **Exercice 28 —** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi et à valeurs strictement positives. Montrer que $\mathbf{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

⋆ **Exercice 29 —**

1. Soit X une variable aléatoire réelle et bornée.

   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbf{P}(X \geqslant a) \leqslant \inf\limits_{t>0} \dfrac{\mathbf{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)}{\mathrm{e}^{ta}}$.
2. Soient $p \in]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Que devient l'inégalité pour $a = \alpha n$?

⋆⋆ **Exercice 30 —** Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ pour $n \geqslant 1$.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y_n.
2. Calculer la variance de Z_n.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{Z_n}{n} - p^2\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆⋆ **Exercice 31 —** *Inégalité de Chernov et marche aléatoire symétrique*
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) = \mathrm{ch}^n(t)$ puis que $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n}) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right) \quad \text{puis} \quad \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$$

3. Montrer enfin que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant 2\exp\left(\dfrac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

   Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

⋆⋆ **Exercice 32 —** *Théorème d'approximation de Weierstrass*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre $x \in [0,1]$. On note également :

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n\,; \quad Z_n = \frac{S_n}{n} \quad \text{et} \quad B_n(f)(x) = \mathbf{E}(f(Z_n))$$

1. Rappeler, sans démonstration, la loi de S_n. En déduire $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :

$$\forall \alpha > 0, \quad \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \mathbf{P}(|S_n - nx| \geqslant n\alpha) \leqslant \frac{1}{4n\alpha^2}$$

3. Justifier alors que $B_n(f)(x) - f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)$.
4. En déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

⋆⋆⋆ **Exercice 33 —** *Loi forte des grands nombres pour des lois de Bernoulli*

1. Démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire réelle.
2. Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de var. aléatoires i.i.d. selon la loi de Rademacher.

   On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer de deux manières $\mathbf{E}\left(S_n^4\right)$.
3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. selon la loi $\mathscr{B}(1/2)$.

   On pose $S'_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\left(\dfrac{S'_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers $1/2$,

   c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S'_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \varepsilon\right)$ converge pour tout $\varepsilon > 0$.