Résumé 10 – Probabilités discrètes

Dénombrement

Par la suite, Ω est un ensemble à n éléments et $p \in [\![0, n]\!]$.

Définition

- Un p-uplet ou une p-liste de Ω est une famille de p éléments de Ω.
- Un arrangement de p éléments de Ω est un p-uplet constitué d'éléments de Ω distincts.
- Une permutation de Ω est un arrangement de Ω à n éléments.
- Une combinaison de p éléments de Ω est un sous-ensemble de Ω contenant p éléments.

On modélise les tirages successifs avec remise à l'aide de listes, les tirages successifs sans remise avec des arrangements et les tirages simultanés avec des combinaisons.

Théorème

- Il y a n^p p-listes de Ω.
- Il y a $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de Ω.
- Il y a $n!$ permutations de Ω.
- Il y a $\dbinom{n}{p}$ combinaisons de p éléments de Ω.

Soient $n, p, m \in \mathbb{N}$.

- $\dbinom{n}{0} = 1, \dbinom{n}{1} = n$
- $\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{n-p}$
- $p\dbinom{n}{p} = n\dbinom{n-1}{p-1}$
- $\dbinom{n-1}{p-1} + \dbinom{n-1}{p} = \dbinom{n}{p}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$

Probabilités discrètes

→ Tribus et probabilités

Définition

On appelle univers l'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire donnée.

Les éléments de l'univers Ω sont qualifiés de *possibles* (ou de *résultats possibles*).

Définition : Réunion et intersection dénombrables

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de l'ensemble Ω. On définit les ensembles $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par :

$$\omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N} \quad \omega \in A_n$$

$$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N} \quad \omega \in A_n$$

Définition : Tribu

Une tribu sur Ω est une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ qui vérifie :

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$;

(ii) Si $A \in \mathscr{A}$ alors $\overline{A} \in \mathscr{A}$

(iii) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}^{\mathbb{N}}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{A}$

La donnée d'un univers Ω et d'une tribu $\mathscr{A}$ définit un espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$; tout élément de $\mathscr{A}$ est appelé événement de Ω.

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

Définition : Système complet d'événements

On appelle système complet d'événements toute famille finie ou dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ d'événements telle que :

(i) Pour tous i et j distincts, $A_i \cap A_j = \varnothing$;

(ii) $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Définition : Probabilité

On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $\mathbf{P} : \mathscr{A} \to [0, 1]$ vérifiant :

- $\mathbf{P}(\Omega) = 1$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) \qquad (\sigma\text{-additivité})$$

Le triplet $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ est appelé espace probabilisé.

Une probabilité est une application qui va opérer sur les événements. La σ-additivité assurera la convergence des séries qui seront manipulées.

Théorème

Soient $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dénombrable et une famille de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe une probabilité $\mathbf{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(\{\omega_n\}) = p_n$ ssi :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n \geqslant 0$;

(ii) la série $\sum p_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_i = 1$.

$\mathbf{P}$ est alors unique et pour tout $A \in \mathscr{P}(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ \omega_n \in A}} p_n$$

Dans le cas fini, on appelle probabilité uniforme sur Ω l'unique probabilité qui prend la même valeur pour chaque événement élémentaire.

Proposition

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé et $A, B \in \mathscr{A}$.

- $\mathbf{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$.
- $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ désignera par la suite un espace probabilisé.

Proposition : Continuité croissante

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements (au sens de l'inclusion), alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

De même, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements (au sens de l'inclusion), $\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

Proposition : Sous-additivité

- Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(A_k)$$

- Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements et si la série $\sum \mathbf{P}(A_n)$ converge, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

→ Conditionnement et indépendance

Théorème / Définition : Probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que $\mathbf{P}(A) \neq 0$. L'application

$$\mathbf{P}_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ B & \longmapsto & \dfrac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}(A)} \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω. On l'appelle probabilité conditionnelle relative à A (ou sachant A).

En tant que probabilité, $\mathbf{P}_A$ vérifie toutes les propriétés énoncées précédemment.

Théorème : Formule des probabilités composées

Soient $n \geqslant 2$ et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements telle que $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors,

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Théorème : Formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système complet d'événements.
Pour tout événement B, la série de terme général $\mathbf{P}(B \cap A_n)$ est convergente et :

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n)$$

Théorème : Formule de Bayes

Soient A et B deux événements,

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A)}{\mathbf{P}(B)} \times \mathbf{P}(B|A)$$

Définition : Indépendance de deux événements

Deux événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ sont dits indépendants si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.

On dit alors des événements $A_1, \ldots, A_n$ qu'ils sont deux à deux indépendants si :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ i \neq j \Longrightarrow \mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

Définition : Mutuelle indépendance

On dit des événements $A_1, \ldots, A_n$ qu'ils sont mutuellement indépendants si :

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$$

L'indépendance mutuelle d'une famille d'événements implique qu'ils sont deux à deux indépendants mais la réciproque est fausse.