6 Réduction d'endomorphismes (1)

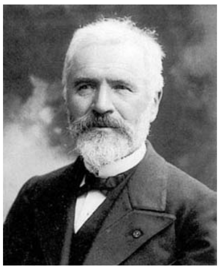
« Les chaussures sont un instrument pour marcher, les maths sont un instrument pour penser. On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin. »

Jean-Marie Souriau (1995)

Plan de cours

♦ **Introduction –** Considérons un endomorphisme f d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et cherchons à déterminer une base $\mathscr{B}$ de cet espace pour laquelle $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est la plus simple possible, à savoir diagonale.

Nous verrons dans la partie *Applications* l'intérêt que présente une telle recherche mais souvenons-nous déjà de l'utilité de cette technique lorsque l'on cherche à calculer les puissances successives d'une matrice.



Camille Jordan [1]

Nous savons qu'il est toujours possible dans le cas d'une projection vectorielle p (respectivement d'une symétrie vectorielle s) de trouver une base qui *diagonalise* cet endomorphisme : il suffit de considérer une base adaptée à $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ (respectivement à $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$). Dans les deux cas, les matrices obtenues sont bien diagonales. Que valent leurs coefficients ?

Revenons au cas général d'un endomorphisme f quelconque pour lequel rien ne nous assure l'existence d'une telle base. Supposons dans un premier temps le problème résolu et considérons une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ pour laquelle la matrice représentative de f est diagonale :

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors nécessairement, quel que soit $i \in [\![1, n]\!]$, $f(e_i) = \lambda_i e_i$. Autrement dit, $(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)(e_i) = 0_E$. Ce qui s'écrit aussi $e_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}_E)$. De plus, un tel vecteur e_i doit être non nul ($\mathscr{B}$ ne serait pas une base sinon). De sorte que l'application $f - \lambda_i \mathrm{id}_E$ n'est pas injective, donc non bijective. Bref, $\det(f - \lambda_i \mathrm{id}_E) = 0$! Au final, si une telle base existe, les coefficients de la matrice diagonale sont à chercher parmi les valeurs de λ pour lesquelles $\det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0$.

Réciproquement, connaissant de telles valeurs pour λ, est-on capable de construire une base qui *diagonalise* l'endomorphisme en question ? S'il n'est pas possible de *diagonaliser* l'endomorphisme, peut-on construire une base pour laquelle la matrice sera « suffisamment » simple ? C'est tout l'enjeu de ce chapitre.

1. Camille Jordan (1838 – 1922), un des grands contributeurs à la théorie de la réduction.

I | Éléments propres d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. f désigne un endomorphisme de E.

A – Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres

Définition 6.1 : Valeurs propres et vecteurs propres

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$.
- On dit alors que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.
- Lorsque E est de dimension finie, on appelle spectre de f l'ensemble des valeurs propres de f dans $\mathbb{K}$. On le note parfois $\mathrm{Sp}(f)$.

Quelques remarques en vrac :

- Un vecteur propre n'est jamais nul !
- En dimension finie, en notant M la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ donnée, x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ ssi $MX = \lambda X$ avec X le vecteur coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. On dira que X est un vecteur propre de M associé à la valeur propre λ.
- x est un vecteur propre de f si et seulement si la droite $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.

Considérons maintenant un scalaire λ et un vecteur x.

$$f(x) = \lambda x \iff (f - \lambda \mathrm{id}_E)(x) = 0_E \iff x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$$

Comme x est non nul, cela revient à dire que $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\}$, c'est-à-dire que $f - \lambda \mathrm{id}_E$ n'est pas injective. En particulier, 0 est valeur propre de f si et seulement si f n'est pas injective.

Définition 6.2 : Sous-espace propre

Soit λ une valeur propre de f.
On appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E)$.

C'est bien un sous-espace vectoriel en tant que noyau d'endomorphisme. Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(f)$, alors $E_\lambda(f) = \{0_E\}$.

Proposition 6.3

Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors tout sous-espace propre de f est stable par g.

Démonstration

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. Pour tout $x \in E_\lambda(f)$, $f(x) = \lambda x$, ce qui implique $f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$. En définitif, $g(x) \in E_\lambda(f)$. On a bien montré la stabilité de $E_\lambda(f)$ par g. ■

Proposition 6.4

Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
Autrement dit, si $\lambda \neq \mu$, alors $\mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E) = \{0_E\}$.

Démonstration

On suppose que $\lambda \neq \mu$ et $x \in \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \cap \mathrm{Ker}(f - \mu \mathrm{id}_E)$. On a donc :

$$f(x) = \lambda x \text{ et } f(x) = \mu x, \text{ ce qui implique } (\lambda - \mu)x = 0_E$$

Et comme $\lambda \neq \mu$, $x = 0_E$. ■

Théorème 6.5

La somme de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Avant de démontrer ce résultat, il peut être utile de rappeler que la somme de sous-espaces vectoriels $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe si et seulement si pour tout $(x_1,\dots,x_p)\in F_1\times\cdots\times F_p$,

$$x_1+\cdots+x_p=0_E \quad\Longrightarrow\quad x_1=\cdots=x_p=0_E$$

Démonstration

Montrons par récurrence sur $p\in\mathbb{N}^*$ que la somme de p sous-espaces propres d'un endomorphisme f associés à des valeurs propres distinctes est directe.

(i) **Initialisation –** Il n'y a rien à démontrer pour $p=1$.
Le résultat vient d'être démontré pour $p=2$.

(ii) **Hérédité –** Supposons la propriété établie pour p sous-espaces propres ; montrons qu'elle est encore vraie pour $p+1$ sous-espaces propres. Considérons pour cela $\lambda_1,\dots,\lambda_{p+1}$ valeurs propres deux à deux distinctes et $(x_1,\dots,x_{p+1})\in E_{\lambda_1}\times\ldots\times E_{\lambda_{p+1}}$ vecteurs propres associés tels que :

$$x_1+\cdots+x_p+x_{p+1}=0 \quad (*)$$

Ce qui nous donne, en applicant f :

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_px_p+\lambda_{p+1}x_{p+1}=0 \quad (**)$$

Multiplions $(*)$ par λ_{p+1} et soustrayons l'équation obtenue à $(**)$:

$$(\lambda_1-\lambda_{p+1})x_1+\cdots+(\lambda_p-\lambda_{p+1})x_p=0$$

L'hypothèse de récurrence conduit alors à $(\lambda_1-\lambda_{p+1})x_1=(\lambda_2-\lambda_{p+1})x_2=\cdots=(\lambda_p-\lambda_{p+1})x_p=0_E$. Ce qui, compte-tenu du fait que les valeurs propres sont distinctes donne :

$$x_1=\cdots=x_p=0_E$$

En reprenant l'équation initiale, il vient également $x_{p+1}=0_E$.

Ceci achève la démonstration par récurrence. ■

Corollaire 6.6

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstration

Raisonnons en deux temps.

(i) **Famille finie –** Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres λ_i supposées deux à deux distinctes. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_pe_p=0_E$$

Comme $\alpha_ke_k\in E_{\lambda_k}$ et que les sous-espaces propres sont en somme directe,

$$\forall k\in[\![1,p]\!]\quad \alpha_ke_k=0_E$$

Les vecteurs propres étant non nuls, tous les α_k le sont. La famille est bien libre.

(ii) **Famille infinie –** D'après ce qui précède, toute sous-famille finie d'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. ■

Corollaire 6.7

En dimension finie, un endomorphisme ne peut admettre plus de $n = \dim(E)$ valeurs propres.

Démonstration

Une famille libre ne peut contenir plus de $\dim(E)$ vecteurs. ■

Exercice 1

Déterminer les éléments propres d'une homothétie, d'un projecteur et d'une symétrie vectorielle.

Exemple

Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $\varphi(P) = P'$. Déterminons les éléments propres de φ.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi) \iff \exists P \neq \tilde{0},\quad \varphi(P) = \lambda P \iff \exists P \neq \tilde{0},\quad \lambda P = P'$$

On a comme seules solutions $\lambda = 0$ et P constant. Donc $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{0\}$ et $E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbb{R}_0[X] = \mathrm{Vect}(1)$.

Exemple

Soit $\psi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\psi(f) = f'$. Déterminons les éléments propres de ψ.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\psi) \iff \exists f \neq 0,\quad \psi(f) = \lambda f \iff \exists f \neq 0,\quad \lambda f = f'$$

Il n'y a aucune condition sur λ et on doit avoir $f(x) = C\mathrm{e}^{\lambda x}$, $C \in \mathbb{R}$.
Donc $\mathrm{Sp}(\psi) = \mathbb{R}$ et $E_\lambda(\psi) = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{id}_E) = \{x \mapsto C\mathrm{e}^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x})$.
Remarque : $(x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille infinie de vecteurs libre.

B – Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

On supposera désormais que E est un espace vectoriel de dimension finie.
On peut donc parler de dimension, de rang, de déterminant et de matrice associée à un endomorphisme.

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } f &\iff f(x) = \lambda x \text{ avec } x \neq 0_E \\
&\iff \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) \neq \{0_E\} \\
&\iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non injective} \\
&\iff f - \lambda \mathrm{id}_E \text{ non bijective } \ \textit{(dim. finie)} \\
&\iff \det(f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0 \iff \det(\lambda \mathrm{id}_E - f) = 0
\end{aligned}$$

La détermination de l'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie peut donc se ramener à un simple calcul de déterminant et à une recherche de racines... d'un polynôme.

Théorème / Définition 6.8 : Polynôme caractéristique

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. L'application $x \mapsto \det(x\mathrm{id}_E - f)$ est polynomiale.
Le polynôme associé est appelé polynôme caractéristique de f. On le note généralement χ_f.

Pour déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme f, on calculera $\det(XI_n - M)$ où M est la matrice de f dans une base quelconque de E (deux matrices semblables ont même déterminant).

Démonstration

Soit M la matrice représentative de f dans une base quelconque. On a :

$$\forall x \in \mathbb{K},\quad \chi_f = \det(x\mathrm{id}_E - f) = \det(xI_n - M) = \begin{vmatrix} x - m_{1,1} & -m_{1,2} & \cdots & -m_{1,n} \\ -m_{2,1} & x - m_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -m_{n-1,n} \\ -m_{n,1} & \cdots & m_{n,n-1} & x - m_{n,n} \end{vmatrix}$$

Le déterminant étant un polynôme en les coefficients de la matrice, χ_f est bien un polynôme. ■

Théorème 6.9

λ est valeur propre de f si et seulement si λ est racine de χ_f.

Démonstration

Il suffit de reprendre la série d'équivalences précédentes. ■

Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2y-z, 3x-2y, -2x+2y+z)$.
Déterminons les éléments propres de f.

En notant M la matrice de f dans la base canonique, il vient $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Après quelques calculs, $\mathrm{Sp}(M) = \{1, 2, -4\}$ puis $E_1 = \mathrm{Vect}((1,1,1))$, $E_2 = \mathrm{Vect}((4,3,-2))$ et $E_{-4} = \mathrm{Vect}((2,-3,2))$.
Notons que l'on obtient par concaténation une base de $\mathbb{R}^3$. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Théorème 6.10 : Propriétés du polynôme caractéristique

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La fonction $\chi_M : x \mapsto \det(xI_n - M)$ est polynomiale de degré n et unitaire.
On a de plus :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_M(x) = x^n - \mathrm{Tr}(M)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$$

Démonstration

Par définition du déterminant,

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(x) = \det(x\,\mathrm{id}_E - f) = \det(xI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (x\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})$$

où l'on a noté $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker.

- Comme annoncé, χ_f est bien un polynôme, de degré au plus n.
- Mais à y regarder de plus près, le seul terme de degré n apparaît dans la somme lorsque pour tout i compris entre 1 et n, $\sigma(i) = i$, c'est-à-dire lorsque $\sigma = \mathrm{id}$. Comme $\varepsilon(\mathrm{id}) = 1$, le terme correspondant dans la somme est $\prod_{i=1}^{n}(x - m_{i,i})$. χ_f est donc de degré n et unitaire.
- Aucun terme de la forme $\prod_{i=1}^{n}(x\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})$ ne peut être de degré $n-1$. Il faudrait pour cela que la permutation σ fixe exactement $n-1$ valeurs, sans fixer la dernière. La seule contribution de degré $n-1$ provient donc du développement du terme $\prod_{i=1}^{n}(x - m_{i,i}) = x^n - (m_{1,1} + m_{2,2} + \cdots + m_{n,n})x^{n-1} + \cdots$.
On retrouve bien l'opposé de la trace de M.
- Le terme constant s'obtient en calculant $\chi_f(0) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n}(-m_{\sigma(i),i}) = (-1)^n \det(M)$. ■

Quel est le nombre de racines de χ_f donc de valeurs propres de f ?

Proposition 6.11

- Si E est un $\mathbb{C}$-e.v. de dimension n alors f admet exactement n valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Lorsque E est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension n, f en admet au plus n.

Exemple

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. $\chi_A=\begin{vmatrix}X & -1\\ 1 & X\end{vmatrix}=X^2+1$. Dès lors, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)=\{\pm i\}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)=\{\}$.

Définition 6.12 : Ordre de multiplicité

On appelle ordre de multiplicité de la valeur propre λ de f, l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de f.

Rappelons que α est une racine de $P\in\mathbb{K}[X]$ d'ordre de multiplicité p si et seulement si une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

(a) Il existe $Q\in\mathbb{K}[X]$ tel que $P=(X-\alpha)^pQ$.

(b) $P(\alpha)=P'(\alpha)=\cdots=P^{(p-1)}(\alpha)=0$.

Exemple

$\chi_f=(X-1)(X-2)^2$ alors 1 est valeur propre simple de f et 2 valeur propre double.

Lemme 6.13

Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Alors, le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit $\chi_{f_{|F}}$ divise χ_f.

Démonstration

Considérons une base $\mathscr{B}$ de F que l'on complète en une base $\mathscr{B}'$ de E. En posant $n=\dim(E)$ et $p=\dim(F)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_{|F}) & B\\ 0 & C\end{pmatrix}\quad\text{et donc,}\quad \chi_M=\begin{vmatrix}XI_p-\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_{|F}) & -B\\ 0 & XI_{n-p}-C\end{vmatrix}$$

C'est un déterminant triangulaire par blocs. On a ainsi $\chi_f=\chi_{f_{|F}}\times\det(XI_{n-p}-C)$, donc $\chi_{f_{|F}}\mid\chi_f$. ■

Théorème 6.14

Soit λ une valeur propre de f d'ordre de multiplicité $m(\lambda)$. Alors,

$$1\leqslant\dim(\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E))=\dim E_\lambda\leqslant m(\lambda)$$

Démonstration

Soit λ une valeur propre de f. Posons $p=\dim(E_\lambda)$.

- Il existe $x\neq 0_E$ tel que $f(x)=\lambda x$. Comme $E_\lambda\neq\{0_E\}$, $p\geqslant 1$.
- De plus, $E_\lambda(f)$ est stable par f. L'endomorphisme induit par f a, dans n'importe quelle base, pour matrice λI_p. Son polynôme caractéristique est $(X-\lambda)^p$.
  En vertu du lemme précédent, $(X-\lambda)^p$ divise χ_f, ce qui nous assure que $p\leqslant m(\lambda)$. ■

Corollaire 6.15

Si λ est racine simple, alors $\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E)$ est de dimension 1.

Exemple

$M=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -2 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Rappelons que $\mathrm{Sp}(M)=\{1,2,-4\}$.

M admet trois valeurs propres simples, ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

0 est valeur propre de M si et seulement si $\det(M)=0$ c'est-à-dire si et seulement si M n'est pas inversible.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique, donc même spectre. Notons que si deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres, les vecteurs propres, eux, diffèrent.

II | Diagonalisation d'un endomorphisme

Dorénavant, f désignera un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.

Définition 6.16 : Diagonalisabilité d'un endomorphisme

L'endomorphisme f est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Dans une telle base, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec λ_i valeur propre de f.

Diagonaliser un endomorphisme, c'est donc déterminer une base de E constituée de vecteurs propres de f.

Quelques remarques :

- Les λ_i apparaissent dans la matrice précédente autant de fois que leur ordre de multiplicité.
- La matrice de f dans n'importe quelle base est alors semblable à une matrice diagonale.

Exemples

id_E est diagonalisable ; un projecteur est diagonalisable.

Définition 6.17 : Diagonalisabilité d'une matrice

Par analogie, une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Rappels : Deux matrices semblables ont même trace, même déterminant et même polynôme caractéristique donc mêmes valeurs propres.

Attention, une matrice (ou un endomorphisme) n'est pas toujours diagonalisable !

Exemple

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a facilement $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.

Si M était diagonalisable, on aurait $M = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Absurde !

Remarquons par ailleurs que $E_0(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

À quelle condition un endomorphisme est-il diagonalisable ? De façon grossière, il faut et il suffit qu'il admette *suffisamment* de vecteurs propres pour pouvoir former une base de E et ainsi construire une matrice diagonale. C'est exactement ce qu'expriment les théorèmes suivants. Mais rappelons quelques résultats avant de les énoncer.

$$
\begin{aligned}
E = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i \quad & \overset{\text{déf.}}{\Longleftrightarrow} \quad \forall x \in E \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \quad x = x_1 + \cdots + x_p \\
& \overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{la concaténation de bases de } F_1, \dots, F_p \text{ est une base de } E \\
& \overset{\text{prop}}{\Longleftrightarrow} \quad \sum_{i=1}^{p} F_i \text{ est directe et } \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)
\end{aligned}
$$

Théorème 6.18 : Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (1)

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E obtenue par concaténation de bases des sous-espaces E_λ.
Par définition, $f(e_i)=\lambda_i e_i$ donc la matrice représentative de f dans cette base est diagonale.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de vecteurs propres de f, tout vecteur x de E s'écrit bien comme combinaison linéaire d'éléments des sous-espaces propres E_{λ_i}. Par ailleurs, cette décomposition est unique puisque ces sous-espaces sont en somme directe (cf. partie I). ■

Corollaire 6.19

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $\dim(E)=\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\dim(E_\lambda)$.

Théorème 6.20 : Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (2)

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé **et** : $\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\ \dim E_\lambda=m(\lambda)$.

Démonstration

Raisonnons là encore par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Notons α_i la dimension de E_{λ_i}. La matrice de f dans une base de diagonalisation est de la forme :

$$M=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I_{\alpha_p}\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\chi_f=\chi_M=(X-\lambda_1)^{\alpha_1}\times\cdots\times(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$. Le polynôme caractéristique de f est donc scindé et l'ordre de multiplicité de λ_i vaut $\dim(E_{\lambda_i})$ et ceci, quel que soit $i\in[\![1,p]\!]$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que χ_f est scindé et que $m(\lambda)=\dim(E_\lambda)$ pour toute valeur propre λ. On a alors :

$$\dim(E)=\deg(\chi_f)\underset{\text{scindé}}{=}\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}m(\lambda)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}\dim(E_\lambda)$$

■

Corollaire 6.21

Si χ_f est non scindé, f n'est pas diagonalisable.

Exercice 2

Soit $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?

Théorème 6.22 : Condition suffisante de diagonalisabilité

Si χ_f est scindé et n'admet que des racines simples alors f est diagonalisable.

Démonstration

En effet, si λ est valeur propre simple de f alors $\dim E_\lambda=1=m(\lambda)$. ■

Pour les 5/2, rappelons comme résultat supplémentaire que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice de passage orthogonale.

Plan de diagonalisation — (hors cas particulier)

❶ Étude de la diagonalisabilité de f.
- On détermine χ_f.
- Si χ_f n'est pas scindé, f n'est pas diagonalisable. Dans $\mathbb{C}$, χ_f est toujours scindé.
- Si χ_f est scindé, on compare $\dim E_\lambda$ et $m(\lambda)$. À ce stade, on n'a pas besoin de déterminer une base de E_λ. On remarquera que $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(M - \lambda I_n)$. (théorème du rang)

❷ Diagonalisation de f lorsque c'est possible.
On détermine une base de E_λ pour chaque valeur propre en résolvant l'équation $MX = \lambda X$ et on concatène les bases obtenues.

Exemple

Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui, les diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\chi_A = (X-2)(X-4)(X-6)$, A diagonalisable. $\chi_B = (X-2)(X-1)^2$ et $\dim E_1 = 1$ donc B n'est pas diagonalisable.
$\chi_C = X(X^2+2)$, C diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mais pas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

III | Trigonalisation d'un endomorphisme

1 – Définition

Définition 6.23 : Trigonalisabilité

- Un endomorphisme f de E est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Théorème 6.24

f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Toute matrice est donc trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice triangulaire T (dont la diagonale est constituée par les valeurs propres de M) et P inversible telles que :

$$T = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Démonstration

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons l'endomorphisme f trigonalisable. Il existe donc une base de E dans laquelle la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, il est scindé.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Raisonnons par récurrence sur la dimension de E.

- **Initialisation –** Le résultat est vrai en dimension 1 puisque toute matrice représentative de f est triangulaire supérieure.

- **Hérédité –** Supposons le résultat établi au rang $n-1$, montrons qu'il est encore vrai au rang n.
  Le polynôme caractéristique de f étant scindé ($n \geqslant 1$), il admet dès lors au moins une racine λ. En notant e_1 un vecteur propre associé, que l'on complète en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, la matrice de f dans cette base est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & M' \end{pmatrix} \text{ où } M' \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

  $\chi_M = (X-\lambda)\chi_{M'}$. $\chi_{M'}$ étant scindé, par hypothèse de récurrence, la matrice M' est trigonalisable. On peut alors écrire $T = P'^{-1}M'P'$ avec $P' \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{K})$. Considérons alors la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

  En effectuant un produit par blocs, il vient :

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & \star \\ 0 & M' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \bullet \\ 0 & P'^{-1}MP' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \bullet \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

  Cette dernière matrice est bien triangulaire, ce qui achève la démonstration par récurrence. ■

Proposition 6.25

La trace d'un endomorphisme est la somme de ses valeurs propres (complexes) et le déterminant son produit.

On rappelle que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_M(x) = x^n - \mathrm{Tr}(M)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M)$$

Il suffit de développer le polynôme caractéristique et d'identifier :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \chi_M(x) = (x-\lambda_1) \times \cdots \times (x-\lambda_n) = x^n - \underbrace{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)}_{=\mathrm{Tr}(M)} x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \underbrace{\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n}_{=\det(M)}$$

On montre facilement que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(M^k) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)} \lambda^k$.

2 – Étude du cas $n = 2$

On suppose χ_f scindé avec $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\dim E = 2$. On l'écrit alors sous la forme $\chi_f = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$.

❶ Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, comme χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.
Dans une certaine base,

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

❷ Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, f est-elle diagonalisable ?
Si c'est le cas,

$$M = PDP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1} = \lambda I_2$$

Et f vaut alors $\lambda \mathrm{id}_E$.
Sinon, $\dim E_\lambda = 1$. Soit $e_1 \in E_\lambda$, $e_1 \neq 0_E$ et on complète la famille libre (e_1) en une base (e_1, e_2) de E. Dans cette base,

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & \times \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

On peut toujours choisir e_2 de telle sorte que $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

3 – Étude du cas $n=3$

On suppose χ_f scindé avec $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\dim E = 3$.On l'écrit alors sous la forme $\chi_f = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$.

❶ Si les λ_i sont distincts, comme χ_f est scindé à racines simples, f est diagonalisable.
Dans une certaine base,

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

❷ Si λ_1 est racine simple et si $\lambda_2 = \lambda_3$, deux possibilités :

- soit $\dim E_{\lambda_2} = 2$ et f est diagonalisable.
- soit $\dim E_{\lambda_2} = 1$ et alors, f n'est pas diagonalisable.
On choisit alors $e_1 \in E_{\lambda_1}$ et $e_2 \in E_{\lambda_2}$ non nuls que l'on complète en une base (e_1, e_2, e_3) de E.
Dans cette base,

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On peut souvent choisir e_3 de sorte que $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.

❸ λ est racine triple. Là aussi, plusieurs possibilités :
- si $\dim E_\lambda = 3$ alors f est diagonalisable. $f = \lambda \mathrm{id}_E$.
- si $\dim E_\lambda = 2$ et alors on complète une base (e_1, e_2) de E_λ en une base (e_1, e_2, e_3) de E.
Dans cette base,

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & \times \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

On peut même choisir e_3 de sorte que $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$.
- si $\dim E_\lambda = 1$, la question est plus délicate et sera étudiée en TD sur quelques exemples.

Exercice 3

Réduire la matrice $M = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

IV | Applications

A – Calcul de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On cherche à calculer A^p par réduction de A.

❶ Si A est diagonalisable alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P \text{ est constituée de vecteurs propres de } A.$$

Donc $A^p = (PDP^{-1})^p = PD^pP^{-1}$ avec $D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$.

❷ Si A est trigonalisable alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que :

$$T = P^{-1}AP \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc $A^p = (PTP^{-1})^p = PT^pP^{-1}$. Le calcul de T^p est cependant plus délicat que dans le cas précédent.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

N est nilpotente donc N^p se calcule aisément, tout comme D^p. Si N et D commutent, on peut utiliser la formule du binôme.
Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on cherchera généralement T sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Les puissances de T peuvent alors se calculer facilement.

Exercice 4

Toméo, un wombat[2] apprivoisé, passe son temps à dormir, à manger et à jouer. Lorsqu'il dort une heure, il a 8 chances sur 10 de continuer à dormir l'heure suivante. Lorsqu'il se réveille, il choisi d'aller manger ou jouer pendant une heure de manière équiprobable. Après ces activités épuisantes, il ira automatiquement dormir. On suppose que Toméo dort à l'heure $h = 0$.

On considère les événements suivants : D_n = « Toméo dort à l'heure n », M_n = « Toméo mange à l'heure n » et enfin J_n = « Toméo joue à l'heure n ». On note d_n (respectivement m_n et j_n) la probabilité associée à D_n (respectivement à M_n et J_n).

1. Pour $n \geqslant 1$, exprimer d_{n+1} en fonction de d_n, m_n et j_n.
2. Faire de même avec m_{n+1} et j_{n+1}.
3. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de d_n. Interpréter.

B – Suites récurrentes linéaires

1 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0 \quad (a \neq 0)$$

On chercher à exprimer u_n en fonction de n. Posons pour cela $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & -\frac{c}{a} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} X_n$.

Par récurrence, $X_n = AX_{n-1} = A^2X_{n-2} = \cdots = A^nX_0 = A^n\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$.
Le problème revient donc à calculer A^n donc à réduire A !

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X + \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} \quad \text{donc} \quad \chi_A(X) = 0 \Longleftrightarrow aX^2 + bX + c = 0.$$

2. marsupial vivant dans les forêts montagneuses d'Australie.

D'après ce qui précède, deux possibilités :

- Deux racines simples λ_1 et λ_2. A est diagonalisable et $A = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^{-1}$.

  Donc $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix} = X_n = P\begin{pmatrix}\lambda_1^n & 0\\ 0 & \lambda_2^n\end{pmatrix}P^{-1}X_0$. Ainsi, $u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$.
  Lorsque les racines sont complexes, elles sont conjuguées :

  $$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2 \quad u_n = \alpha\lambda^n + \beta\overline{\lambda}^n$$

  Comme $u_n\in\mathbb{R}$, $u_n = \overline{u_n}$ conduit à $\beta = \overline{\alpha}$. En posant $\lambda = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$,

  $$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \rho^n\left(\alpha\mathrm{e}^{in\theta} + \overline{\alpha\mathrm{e}^{in\theta}}\right) = 2\rho^n\mathrm{Re}(\alpha\mathrm{e}^{in\theta}) = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)) \text{ avec } A, B\in\mathbb{R}$$

- Une racine double λ. Comme $A\neq\lambda I_2$, $A = P\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}P^{-1}$.

  Donc $\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix} = X_n = P\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}P^{-1}X_0$. Ainsi, $u_n = (\alpha + n\beta)\lambda^n$.

Théorème 6.26 : Suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite vérifiant $\begin{cases} u_0, u_1\in\mathbb{R}\\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n\end{cases}$ $(*)$

On considère l'équation caractéritique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ.

— Si $\Delta > 0$ alors on obtient deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$$

— Si $\Delta = 0$ alors on obtient une racine double r.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = (\alpha + n\beta)\lambda^n$$

— Si $\Delta < 0$ alors on obtient deux racines complexes conjuguées $\rho\mathrm{e}^{\pm i\theta}$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta))$$

L'ensemble des suites vérifiant la relation $(*)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 5

Exprimer u_n en fonction de n dans les deux cas suivants :

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 1\end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 1\end{cases}$$

2 – Suites récurrentes linéaires d'ordre p

On généralise aisément ce théorème à des suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur.

Théorème 6.27

Soient $p\in\mathbb{N}^*$ et $(a_0,\dots,a_{p-1})\in\mathbb{K}^p$. L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \cdots + a_0u_n \quad (*)$$

forme un espace vectoriel de dimension p.

Démonstration

Notons E_p l'ensemble des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui vérifient la relation $(*)$.

- Montrons tout d'abord que E_p est un espace vectoriel.
  - La suite nulle vérifie bien la relation de récurrence $(*)$.
  - Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E_p et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose alors $w_n = \lambda u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_p$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + a_{p-2}u_{n+p-2} + \cdots + a_0 u_n\ ; \quad v_{n+p} = a_{p-1}v_{n+p-1} + a_{p-2}v_{n+p-2} + \cdots + a_0 v_n$$
  Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,
  $$\begin{aligned} w_{n+p} = \lambda u_{n+p} + v_{n+p} &= a_{p-1}(\lambda u_{n+p-1} + v_{n+p-1}) + \cdots + a_0(\lambda u_n + v_n) \\ &= a_{p-1}w_{n+p-1} + a_{p-2}v\, w_{n+p-2} + \cdots + a_0 w_n \end{aligned}$$
- Montrons maintenant que E_p est de dimension p en établissant un isomorphisme entre E_p et $\mathbb{K}^p$. Considérons l'application $\varphi : E_p \to \mathbb{K}^p$ définie par $\varphi((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (u_0, \ldots, u_{p-1})$. C'est tout simplement l'application qui à une suite de E_p lui associe ses p premières valeurs. Cette application est bien linéaire et toute suite de E_p est entièrement définie par la donnée de p conditions initiales. Bref, φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, ce qui montre que E_p est de dimension p. ■

Pour $p = 2$, on retrouve le résultat du paragraphe précédent.

Essayons d'obtenir une base de E_p. L'idée consiste là encore à transformer notre relation de récurrence scalaire d'ordre p en une récurrence vectorielle d'ordre 1. Posons pour cela :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}); \quad A = \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \ldots & \ldots & a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$$

Comme $X_{n+1} = AX_n$ pour tout entier n, on trouve $X_n = A^n X_0$. Reste à calculer A^n. On traitera uniquement le cas où A admet p valeurs propres simples. A est alors diagonalisable. Il existe donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} u_{p-1} \\ u_{p-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}$$

u_n est donc une combinaison linéaire des λ_i^n et l'ensemble des suites vérifiant la relation $(*)$ est :

$$\mathrm{Vect}(n \mapsto \lambda_1^n, \ldots, n \mapsto \lambda_p^n)$$

Comme la famille est génératrice et qu'elle comporte $p = \dim(E_p)$ vecteurs, c'est bien une base de E_p.

On pourra remarquer que le polynôme caractéristique de A n'est rien d'autres que $X^p - a_{p-1}X^{n+p-1} - \cdots - a_0$, qui est donc scindé et admet pour racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Que de similitudes avec le cas $p = 2$!

V | Endomorphismes nilpotents

Dans cette partie, E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 6.28 : Endomorphisme nilpotent

Un endomorphisme f de E est dit nilpotent s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
On appelle alors indice de nilpotence de f le plus petit de ces entiers p.

Si l'on note $p \in \mathbb{N}^*$ l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent f, on a $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

On définit de façon analogue la propriété de nilpotence d'une matrice.

Exemple

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente. Quel est son ordre de nilpotence ?

Proposition 6.29

L'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est inférieur ou égal à $\dim(E)$.

Démonstration

Soit p l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent f. Comme $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, il existe $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrons alors que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
Soit, pour cela, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-2} f^{p-2}(x) + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) = 0_E$.
On applique successivement $f, f^2, \ldots, f^{p-1}$ de telle sorte que, par nilpotence,

$$\begin{aligned}
\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{p-2} f^{p-2}(x) + \lambda_{p-1} f^{p-1}(x) &= 0_E \\
\lambda_0 f(x) + \lambda_1 f^2(x) + \cdots + \lambda_{p-2} f^{p-1}(x) &= 0_E \\
&\vdots \\
\lambda_0 f^{p-2}(x) + \lambda_1 f^{p-1}(x) &= 0_E \\
\lambda_0 f^{p-1}(x) &= 0_E
\end{aligned}$$

Comme $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, on trouve $\lambda_0 = 0$ puis, en remontant, on a successivement $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{p-1} = 0$.
Nous avons une famille libre de p vecteurs. Nécessairement, $p \leqslant \dim(E)$. ■

Ce résultat appelle plusieurs remarques. D'une part, on a obligatoirement $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$ puisque $p \leqslant n$. D'autre part, si l'indice de nilpotence est maximal, c'est-à-dire s'il est égal à n alors la famille de vecteurs introduite dans la preuve est une base de E. On peut alors écrire la matrice de f dans la base $(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x), \ldots, f(x), x)$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et elle n'est clairement pas diagonalisable. Nous allons montrer plus généralement que 0 est la seule valeur propre complexe d'un endomorphisme nilpotent.

Proposition 6.30

Un endomorphisme est nilpotent si, et seulement s'il est trigonalisable et si 0 est sa seule valeur propre.

Démonstration

Démontrons ce résultat par une approche matricielle.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la matrice M nilpotente. Quitte à travailler dans $\mathbb{C}$, soit λ une valeur propre de M et X un vecteur propre associé. On a $MX = \lambda X$. Une récurrence simple nous donne $M^n X = \lambda^n X = 0$. Comme $X \neq 0$, il vient $\lambda = 0$. La seule valeur propre complexe de M (il y en a n) est 0. $\chi_M = X^n$ est scindé sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$, la matrice est trigonalisable.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si M est trigonalisable et de valeurs propres toutes nulles, alors M est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \times & \times \\ \vdots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

On montre alors que $T^n = 0$. Il s'en suit que $M^n = 0$, la matrice est bien nilpotente. ■