Réduction #1

Travaux dirigés #06

Partie A – Pour démarrer...

Exercice 1 — Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que :

$$E_2 = \mathrm{Vect}((1,2)) \text{ et } E_{-3} = \mathrm{Vect}((1,1)), \text{ avec } E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$$

1. Montrer que f est un automorphisme diagonalisable.
2. Préciser la trace, le déterminant de f et son polynômes caractéristique.
3. Calculer $f((2,3))$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 2 — Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que :

$$(u - 3\mathrm{id}_E) \circ (u + 2\mathrm{id}_E) = 0$$

Montrer que u est diagonalisable.

Partie B – Réduction matricielle

Exercice 3 — Réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 — Diagonaliser sans effort la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 — Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & 9 & 4 \\ -6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 —

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & c & 2 & 0 \\ d & e & f & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? $(a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C})$

Exercice 7 — On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1/n & 1/n \\ -1/n & 1 + 2/n & 1/n \\ 1/n & -1/n & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer sans calcul que 1 et $1 + 1/n$ sont valeurs propres de A_n.
2. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? inversible ?
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n la matrice produit $B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$.
   La matrice B_n est-elle diagonalisable ? inversible ? Si oui, déterminer B_n^{-1}.

Exercice 8 — *Matrices circulantes*

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

1. Calculer A^3 ; en déduire les valeurs propres possibles de A.
   Préciser alors les éléments propres de A.
2. Diagonaliser M.

Exercice 9 — Soient trois suites u, v et w définies par $u_0 = -2$, $v_0 = 1$ et $w_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n - 3v_n - 3w_n \\ v_{n+1} = 3u_n - 2v_n - 3w_n \\ w_{n+1} = 3u_n - 3v_n - 2w_n \end{cases}$$

Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 10 — Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 45u_n - 39u_{n+1} + 11u_{n+2} \end{cases}$$

Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 11 — Déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0)\\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1\\ (0) & & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 — Soient $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $B^2=A$.

1. La proposition « A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ B diagonalisable » est-elle vraie ?
2. Soit $A=\begin{pmatrix} 11 & -5 & -5\\ -5 & 3 & 3\\ -5 & 3 & 3\end{pmatrix}$. On cherche $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $B^2=A$.
   a) Montrer que A est semblable à une matrice diagonale D.
   b) Déterminer l'ensemble des matrices C telles que $C^2=D$.
   c) En déduire les matrices B qui conviennent.

Exercice 13 — *Diagonalisation simultanée (première approche)*
Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés. On suppose que A admet n valeurs propres distinctes et que $AB=BA$.

1. Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g et en déduire l'existence d'une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres communs à f et g.
2. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Résoudre l'équation matricielle $2M^2+5M=3A$.

Exercice 14 — Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B=\begin{pmatrix} A & I_n\\ I_n & A\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$, avec $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\chi_B(X)=\chi_A(X+1)\cdot\chi_A(X-1)$.
2. On suppose A diagonalisable. Montrer que B est diagonalisable.

🚲 **Exercice 15 —** Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. a) On suppose ici seulement A inversible. Montrer que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.
   b) Justifier que pour $p\in\mathbb{N}$ suffisamment grand $A+\frac{1}{p}\cdot I_n\in\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.
   En déduire que $\chi_{AB}=\chi_{BA}$.
   c) Retrouver ce résultat en utilisant une caractérisation du rang.
2. a) On suppose ici A inversible. Montrer que les sous-espaces propres de AB et BA ont deux à deux même dimension puis en déduire que AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.
   b) Trouver A et B telles que $AB=0$ et $BA\neq 0$. Qu'en déduire ?

Exercice 16 — On possède deux urnes. Initialement, il y a deux boules blanches dans U_1 et deux noires dans U_2. À chaque tirage, on prend une boule dans U_1 et une boule dans U_2, et on les échange. On appelle X_k le nombre de boules blanches dans U_1 après le k-ième tirage. On pose $X_0=2$.

1. Déterminer $X_k(\Omega)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
2. On pose $Y_k=\begin{pmatrix}\mathbf{P}(X_k=0) & \mathbf{P}(X_k=1) & \mathbf{P}(X_k=2)\end{pmatrix}^\top$.
   Trouver une matrice A telle que $Y_{k+1}=AY_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.
   En déduire l'espérance de X_k.
3. Trouver une base de vecteurs propres de A. Décomposer Y_0 dans cette base.
4. Montrer que $Y_k=A^kY_0$. En déduire la loi de X_k.

Partie C – Réduction d'endomorphismes

Exercice 17 — Soit $E=\mathbb{R}[X]$.
Pour tout $P\in E$, on pose $f(P)=(X+1)(X-3)P'-XP$.

1. Montrer que $f\in\mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
   INDICATION : *On pourra déterminer le degré de tels vecteurs propres.*

Exercice 18 — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ ($n\in\mathbb{N}^*$) par :

$$\varphi(P)=nXP-(X^2-1)P'$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que la famille $(1,X-1,\ldots,(X-1)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer la matrice de φ dans cette base.
3. L'application φ est-elle diagonalisable ?

Exercice 19 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = X(1-X)P' + nXP$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f
   INDICATION : *On pourra résoudre une équation différentielle.*
3. f est-elle diagonalisable ?

Exercice 20 — À tout polynôme P à coefficients réels on associe le polynôme :

$$\varphi(P) = (X-1)(X-2)P' - 2XP$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que si P est un vecteur propre de φ, alors $\deg(P) = 2$.
3. Déterminer les éléments propres de φ.

Exercice 21 — On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \{aI_3 + bA + cA^2 ; (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que $A^3 \in E$.
   Montrer que $\mathcal{B} = (I_3, A, A^2)$ est une base de E.
2. Quelle équation vérifient les valeurs propres de A ?
3. Déterminer, sans calculer ses valeurs propres, si A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Même question dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
4. On définit l'application Φ_A en posant pour tout $M \in E$: $\Phi_A(M) = AM$.
   Montrer que Φ_A est un endomorphisme de E et en donner la matrice dans $\mathcal{B}$. L'application Φ_A est-elle diagonalisable ?

Exercice 22 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie $n \geqslant 1$ et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$.

1. a) En considérant la restriction de u à $\mathrm{Im}(v)$, montrer que :

   $$\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u \circ v) + \dim(\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(v))$$

   b) En déduire que $\dim \mathrm{Ker}(u \circ v) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Ker}(v)$.

   c) Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathcal{L}(E)^p$, où $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

   $$\dim \mathrm{Ker}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_p) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim \mathrm{Ker}(u_k)$$

2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe des scalaires $(\lambda_k)_{k \in [\![1,p]\!]}$ deux à deux distincts tels que :

   $$(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (f - \lambda_p \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

   Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{id}_E)$. Que dire de l'endomorphisme f ?

Exercice 23 — Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs réelles. Pour toute fonction $f \in E$, on définit la fonction g par :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) = \int_0^x \inf(x,t) f(t)\, \mathrm{d}t$$

On note enfin T l'application définie sur E par $T : f \mapsto g$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.
   On résoudra pour cela une équation différentielle du second ordre.

CCINP Exercices 59, 63, 67, 69, 70, 72, 73 et 83.