

Réduction #2

Travaux dirigés #11

⚙️ Partie A – Sous-espaces stables

Exercice 1 — Soit E un endomorphisme de dimension finie. On considère un endomorphisme u diagonalisable.

- Rappeler pourquoi la restriction de u à tout sous-espace vectoriel stable est diagonalisable.
- En déduire que tout sous-espace vectoriel stable est somme directe de droites propres.

- Trouver les sous-espaces stables de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 — Soient u, v deux endomorphismes d'un \mathbb{C} -e.v. de dimension finie non nulle, vérifiant $u \circ v = v \circ u$. Montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 3 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB = 0$.

- Montrer que A et B possèdent un vecteur propre en commun.
- Montrer par récurrence que A et B sont simultanément trigonalisables.

Exercice 4 — Soient E un \mathbb{C} -e.v. de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \text{id}_E$.

- Décrire les sous-espaces stables de u .
- Même question lorsque E est un \mathbb{R} -e.v.

⚙️ Partie B – Polynômes annulateurs et équations matricielles

Exercice 5 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On suppose A nilpotente. Montrer de deux manières que $A^n = 0$.
- On suppose A inversible.
 - Montrer de deux manières que A^{-1} est un polynôme en A .
 - Comparer les polynômes minimaux de A et A^{-1} .

Exercice 6 — Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$, non constant, tel que $AB = P(A)$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 7 — Soit $A \in \mathcal{GL}_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$.

- Montrer que A est diagonalisable.
- On suppose de plus que $\text{Tr}(A) = 8$. Déterminer χ_A .

Exercice 8 — Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = A$ et $\text{Tr}(A) = 0$.

Exercice 9 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que $\text{rg}(A)$ est pair.

Exercice 10 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 11 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $3A^3 = A^2 + A + I_n$. Montrer que la suite $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice de projecteur.

Exercice 12 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

- Montrer que A n'est pas inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp}(A)$.
- Trouver un polynôme annulateur de A de degré 4 et en déduire que A est diagonalisable.

Exercice 13 — Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ telle que la famille $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u .

⚙️ Partie C – Polynôme minimal

Exercice 14 — Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sont-elles diagonalisables?

Exercice 15 — Le polynôme $X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ peut-il être le polynôme minimal d'une matrice de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$?

Exercice 16 — Comparer le polynôme minimal de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ aux polynômes minimaux des matrices :

$$B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

Exercice 17 — Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel de dimension quelconque, admettant un polynôme minimal π_u .

1. Montrer que l'endomorphisme u est bijectif si et seulement s'il est injectif.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que P et π_u premiers entre eux. Montrer que $P(u)$ est bijectif.
3. Si $P(u)$ n'est pas bijectif, le polynôme P divise-t-il π_u ?

Partie D – Polynômes d'endomorphismes et réduction

Exercice 18 — Soit ψ l'application définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \psi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$$

1. Montrer que ψ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ diagonalisable.
2. Quels sont ses éléments propres ?

Exercice 19 — Soient E un \mathbb{R} -e.v. de dimension finie et f un endomorphisme de E admettant un polynôme annulateur $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\text{Im}(f)$ est le noyau d'un polynôme en f .
2. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.
3. Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E où la matrice de f est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } A \text{ inversible}$$

Exercice 20 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice d'un projecteur. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM + MA$.

1. Trouver un polynôme annulateur de φ .
2. Prouver que φ est diagonalisable.

Exercice 21 — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et les deux applications φ et ψ définies par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = AM \quad \text{et} \quad \psi(M) = MA$$

1. Montrer que $\pi_\varphi = \pi_\psi = \pi_A$. En déduire que φ et ψ sont diagonalisables si, et seulement si, A est diagonalisable.
2. Montrer que φ , ψ et A partagent les mêmes valeurs propres. Décrire les sous-espaces propres de φ et ψ en fonction des sous-espaces propres de A .

Exercice 22 — *Matrices circulantes, le retour!*

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & m_1 \\ m_1 & \cdots & m_{n-1} & m_0 \end{pmatrix}$$

On note A la matrice obtenue pour $m_1 = 1$ et $m_0 = m_2 = \cdots = m_{n-1} = 0$.

1. Déterminer un polynôme annulateur de A et exprimer ses valeurs propres à l'aide des racines n -ièmes de l'unité.
2. Montrer que la matrice M est diagonalisable et préciser son déterminant.

Exercice 23 — *Réduction simultanée*

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u et v deux endomorphismes diagonalisables vérifiant $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que la restriction de v à tout sous-espace propre de u définit un endomorphisme diagonalisable.
2. Montrer qu'il existe une base commune de diagonalisation à u et v .

Exercice 24 — Soit E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ vérifiant $u \circ v - v \circ u = v$.

1. Calculer $u \circ v^p - v^p \circ u$.
2. En déduire, grâce à l'endomorphisme $f \mapsto u \circ f - f \circ u$, que v est nilpotent.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que u et v ont un vecteur propre commun.

Exercice 25 — Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\text{Tr}(A^k) = 0$.

Exercice 26 — Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note enfin f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $v \mapsto u \circ v$.

1. Montrer que $\text{Sp}(f) \subset \text{Sp}(u)$.
2. Soient $\lambda \in \text{Sp}(u)$, E_λ le sous-espace propre associé et v un projecteur sur E_λ . Montrer que v est un vecteur propre de f et en déduire que $\text{Sp}(f) = \text{Sp}(u)$.
3. Soient E_λ et Δ_λ les sous-espaces propres respectivement associés à u et à f pour la même valeur propre λ . On admet que $\dim(\Delta_\lambda) = n \dim(E_\lambda)$. Montrer que si u est diagonalisable, alors f est diagonalisable.
4. Montrer que u et f ont le même polynôme minimal.

 **Exercice 27** — *Commutant d'un endomorphisme*

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel E de dimension n . On note \mathcal{C}_f l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f .

1. Montrer que \mathcal{C}_f est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Montrer qu'un endomorphisme g appartient à \mathcal{C}_f si, et seulement si, chaque sous-espace propre de f est stable par g .
3. En considérant les restrictions aux sous-espaces propres de f de tout endomorphisme commutant avec f , montrer que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} m(\lambda)^2$.
4. Comparer $\mathbb{K}[f]$ et \mathcal{C}_f .
5. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de \mathcal{C}_f .

Exercice 28 — Soient E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal $(X - 1)^2$.

1. On pose $g = f - \text{id}_E$. Comparer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$.
2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs, avec uniquement des blocs de la forme (1) ou $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.