

## Résumé 3 – Réduction d'endomorphismes

### Éléments propres

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

#### → Généralités

##### Définition

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $u$  associé au vecteur propre  $x \in E$  si :

$$u(x) = \lambda x \text{ avec } x \neq 0_E$$

On appelle spectre de  $u$  et on note  $\text{Sp}(u)$  l'ensemble des valeurs propres de  $u$ .

- On appelle sous-espace propre associé à  $\lambda$  l'espace vectoriel  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ .

##### Théorème

- Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

#### → Polynôme caractéristique

On suppose désormais  $E$  de dimension finie  $n$ .

##### Définition

On appelle polynôme caractéristique de  $u$  le polynôme  $\chi_u = \det(X \text{id}_E - u)$ .

##### Théorème

- Les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines de  $\chi_u$ .
- $\chi_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u)$ .
- La somme des valeurs propres (complexes) vaut  $\text{Tr}(u)$  et leur produit  $\det(u)$ .

Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel,  $u$  admet exactement  $n$  valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité. Lorsque  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, elle en admet au plus  $n$ .

Si  $F$  est stable par  $u$ , le polynôme caractéristique  $\chi_{u|_F}$  de l'endomorphisme induit divise  $\chi_u$ .

##### Théorème

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  d'ordre de multiplicité  $m(\lambda)$ .

$$1 \leq \dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)) \leq m(\lambda)$$

Si  $\lambda$  est valeur propre simple, alors  $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$  est une droite vectorielle.

### Polynômes d'endomorphismes et de matrices

#### → Algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  (ou  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ), on définit :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \text{Vect}(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

$(\mathbb{K}[u], +, \circ, \cdot)$  possède une structure d'algèbre commutative. L'application  $P \mapsto P(u)$  définit un morphisme d'algèbres de  $\mathbb{K}[X]$  dans  $\mathcal{L}(E)$ ; son image est  $\mathbb{K}[u]$ .

Si  $E$  est de dimension finie,  $\mathbb{K}[u] \subset \mathcal{L}(E)$  l'est aussi.

##### Proposition

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , les sous-espaces  $\text{Im}(P(u))$  et  $\text{Ker}(P(u))$  sont stables par  $u$ .

#### → Polynômes annulateurs et polynôme minimal

##### Définition : Polynôme annulateur

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ .  $P$  est appelé polynôme annulateur de  $u$  si  $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

La définition est identique pour une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

En dimension finie, il existe toujours un polynôme annulateur non trivial (donc une infinité).

Si  $P$  et  $Q$  annulent  $u$ ,  $\text{pgcd}(P, Q)$  annule  $u$  (Bézout).

##### Théorème / Définition : Polynôme minimal

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est non nul et  $E$  de dimension finie, il existe un unique polynôme unitaire qui divise tous les polynômes annulateurs de  $u$ .

Ce polynôme est appelé polynôme minimal de  $u$  et on le note  $\pi_u$ .

Un endomorphisme en dimension infinie n'admet pas toujours de polynôme minimal.

##### Proposition

Deux matrices semblables ont même polynôme minimal.

##### Proposition

Si  $d$  est le degré du polynôme minimal de  $u$ , alors la famille  $(u^k)_{0 \leq k < d-1}$  est une base de  $\mathbb{K}[u]$ .

En particulier,  $\dim(\mathbb{K}[u]) = \deg(\pi_u)$ .

##### Proposition

Soit  $F$  un sous-espace stable par  $u$  non réduit à  $\{0_E\}$ . Alors, le polynôme minimal de l'endomorphisme induit  $u|_F$  divise celui de  $u$ .

Cela fournit un argument utile de diagonalisabilité pour un endomorphisme induit.

## → Polynômes annulateurs et valeurs propres

**Théorème**

Si  $P$  annule  $u$ , toute valeur propre de  $u$  est racine de  $P$ . Si  $u(x) = \lambda x$ , alors  $P(u)(x) = P(\lambda)x$ .

Attention, l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur contient les valeurs propres mais n'est pas égal, en général, au spectre de  $u$ .

## → Théorème de Cayley-Hamilton

**Théorème : Théorème de Cayley-Hamilton**

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie (ou d'une matrice) est un polynôme annulateur. Autrement dit, si  $E$  est de dimension finie,

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \quad \chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Le polynôme minimal d'un endomorphisme divise ainsi le polynôme caractéristique. Le degré du polynôme minimal est donc inférieur ou égal à  $\dim(E)$ .

**Théorème**

Les racines du polynôme minimal de  $u$  sont exactement ses valeurs propres.

**Proposition**

Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est nilpotente si, et seulement si, son polynôme caractéristique est  $X^n$ .

## → Lemme des noyaux

**Théorème : Lemme des noyaux**

Si  $P_1, \dots, P_r$  sont des polynômes deux à deux premiers entre eux de produit égal à  $P$ , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$$

En particulier, si  $P$  annule  $u$ ,  $E = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u))$ .

$E$  est alors la somme de sous-espaces stables par  $u$ .

**Diagonalisation****Définition**

- Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale.
- Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de vecteurs propres de  $f$ . Dans cette base, la matrice de  $f$  est diagonale.

**Théorème : CNS de diagonalisabilité**

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- $u$  est diagonalisable
- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda$
- $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda)$
- $\chi_u$  est scindé et,  $\forall \lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda = m(\lambda)$
- il existe un polynôme scindé à racines simples annulant  $u$ .
- le polynôme minimal de  $u$  est scindé à racines simples.

Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est annihilée par un polynôme scindé à racines simples.

Pour que  $u$  soit diagonalisable,  $\pi_u$  ne doit pas contenir de facteur de la forme  $(X - \lambda)^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ .

**Théorème : CS de diagonalisabilité (1)**

Si  $\chi_u$  est scindé et n'admet que des racines simples alors  $u$  est diagonalisable.

**Théorème : CS de diagonalisabilité (2)**

- Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est diagonalisable à l'aide d'une base orthonormale de vecteurs propres.
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable au moyen d'une matrice orthogonale.

Plan de diagonalisation (à l'aide de  $\chi_u$ ) :

- Étude de la diagonalisabilité de  $u$ .
  - On détermine  $\chi_u$ .
  - Si  $\chi_u$  n'est pas scindé,  $u$  n'est pas diagonalisable.
  - Si  $\chi_u$  est scindé, on compare  $\dim E_\lambda$  et  $m(\lambda)$ .
- Diagonalisation de  $u$  lorsque c'est possible. On détermine une base de  $E_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  en résolvant l'équation  $u(x) = \lambda x$  et on concatène les bases obtenues.

**Corollaire**

Si  $u$  est diagonalisable, alors pour tout sous-espace vectoriel  $F$  non réduit à  $\{0_E\}$  et stable par  $u$ , l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  est diagonalisable.

**Trigonalisation****Définition : Trigonalisabilité**

- Un endomorphisme  $u$  de  $E$  est dit trigonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure.
- Une matrice est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

**Théorème : CNS de trigonalisabilité**

Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $u$  est trigonalisable.
- (ii) Son polynôme caractéristique est scindé.
- (iii) Son polynôme minimal est scindé
- (iv)  $u$  est annulé par un polynôme scindé.

Toute matrice est donc trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On a  $T = P^{-1}MP$  avec  $T$  une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est constituée par les valeurs propres de  $M$ .

Lorsque  $n = 2$  ou  $n = 3$ , on cherchera généralement  $T$  sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \times & \times \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

**Théorème**

Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . S'il existe un polynôme scindé annihilant  $M$ , alors  $M$  est semblable à une matrice diagonale par blocs triangulaires supérieurs. Autrement dit, à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad T_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \text{▲} \\ & \lambda_i \end{bmatrix}$$