Compléments d'algèbre linéaire

Travaux dirigés #04

Partie A – Matrices

Exercice 1 — Soient $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ et $A=(a_{i,j})$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

$$a_{i,j}=\begin{cases}\alpha & \text{si } i\neq j\\ \beta & \text{si } i=j\end{cases}$$

1. Calculer A^m pour $m\in\mathbb{N}$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (α,β) pour que la matrice A soit inversible et donner alors son inverse.

Exercice 2 — *Matrices de rang* 1
Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $U,V\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $M=U{}^tV$.
2. Calculer, pour tout $p\in\mathbb{N}$, M^p.
3. Montrer que I_n+M est inversible si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(M)\neq -1$ et déterminer alors $(I_n+M)^{-1}$.

Exercice 3 — *Matrices nilpotentes*
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est une matrice nilpotente s'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $A^k=0$. Si une matrice A non nulle est nilpotente, on appelle indice de nilpotence de A l'entier $p\in\mathbb{N}$ tel que $A^{p-1}\neq 0$ et $A^p=0$.

1. Trouver une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'indice n.
2. Montrer qu'en général, la somme de deux matrices nilpotentes n'est pas nilpotente.
3. Montrer que si A,B sont deux matrices nilpotentes qui commutent alors $A+B$ et AB sont nilpotentes.
4. On suppose que A est nilpotente d'indice n.
   Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} A^k$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4 — Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\0&2&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.
Dans cet exercice, I désigne la matrice identité d'ordre 3 et 0_3 la matrice nulle d'ordre 3. On se propose de calculer les puissances de A de plusieurs manières.

1. *Par diagonalisation*
   On pose $P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.
   a) Démontrer que P est inversible et donner son inverse.
   b) Calculer $D=P^{-1}AP$, D^n puis A^n.
   c) Montrer que D est inversible et en déduire que A est inversible.
   En déduire alors l'expression de A^{-n} en fonction de n, où n est un entier naturel.
2. *Par la formule du binôme de Newton*
   a) Soit $B=A-2I$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer B^n en fonction de B.
   b) En utilisant la formule du binôme, calculer l'expression de A^n en fonction de n, A et I.
3. *Par polynôme annulateur*
   a) Montrer que $A^2-3A+2I=0_3$.
   b) Démontrer par récurrence qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n,
   $$A^n=a_nA+b_nI$$
   Donner les relations de récurrence vérifiées par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et exprimer a_n et b_n en fonction de n.
   En déduire l'expression de A^n en fonction de n, A et I.
   c) Justifier que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 5 — Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles et lorsqu'elles le sont, calculer leur inverse. Déterminer leur rang.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&3&-1\\1&2&4\end{pmatrix}\ ;\quad B=\begin{pmatrix}1&2&-1\\-2&-3&4\\1&4&3\end{pmatrix}\ ;\quad C=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\2&-1&1\\4&-2&3\end{pmatrix}$$

Exercice 6 — On considère la matrice à coefficients réels suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7 — *Matrices à diagonale dominante*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0$. En raisonnant sur l'une des coordonnées de X de plus grand module, montrer par l'absurde que $X = 0$. Qu'en déduire ?

Partie B – Espaces vectoriels

Exercice 8 — On peut définir les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ par la donnée :

- d'équations cartésiennes : $A = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y-z-t = 0, x+2z = 0\right\}$
- d'un paramétrage : $B = \left\{(2a-b+2c, 3a+2b-c, -b+c, c) \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$
- d'une famille génératrice : $C = \mathrm{Vect}\left((0,-1,2,1),(1,2,1,0)\right)$

Écrire chacun de ces ensembles sous les trois formes possibles.

Exercice 9 — Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-e.v. E.

1. On pose $u_i = e_1 + \cdots + e_i$ pour tout entier i compris entre 1 et p.
   La famille $(u_1, \dots, u_p)$ est-elle libre ?
2. Reprendre la question avec $v_k = e_k - e_{k+1}$ si $k \in [\![1, p-1]\!]$ et $v_p = e_p$.

Exercice 10 — On considère les trois suites complexes définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1\,; \quad v_n = j^n\,; \quad w_n = \overline{j}^n$$

Montrer que la famille $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}})$ est libre.

Exercice 11 —

1. Montrer que la famille $\left((X-\lambda)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer les coordonnées de $P \in \mathbb{C}[X]$ dans cette base.

Exercice 12 — Montrer que les familles suivantes sont libres dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$:

$$\mathscr{F} = (x \mapsto \cos(nx))_{n\in\mathbb{N}}\,; \quad \mathscr{G} = \left(x \mapsto \cos^n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}\,; \quad \mathscr{H} = \left(x \mapsto \mathrm{e}^{\alpha_n x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

où les α_n sont des nombres complexes deux à deux distincts.

Exercice 13 — Soit $E = \mathscr{C}([-2,2],\mathbb{R})$ et $F = \left\{f \in E \mid \forall k \in [\![-2,2]\!]\ f(k) = 0\right\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel. Est-il de dimension finie ?
2. Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales définies sur $[-2,2]$ de degré au plus 4 est un supplémentaire de F dans E.

Exercice 14 — Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de $\mathbb{R}^n$ où $n \geqslant 2$.

1. Quelle est la dimension possible de $H_1 + H_2$?
2. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

Exercice 15 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et F un s.e.v. distinct de E.

1. Soit H est un hyperplan de E ne contenant pas F. En considérant $F+H$, montrer que $\dim(F \cap H) = \dim(F) - 1$.
2. Montrer que F peut s'écrire comme l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans.
3. Quel est le nombre minimum d'hyperplans nécessaires ?

Partie C – Applications linéaires

Exercice 16 — Soit (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$ et un réel λ.
Démontrer que la donnée de

$$f(e_1) = e_1 + e_2, \quad f(e_2) = e_1 - e_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + \lambda e_3$$

permet de définir un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Comment choisir λ pour que f soit injective ? surjective ?

Exercice 17 — Soient $E=\mathbb{R}^3$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(4x+y-z,2x+3y-z,2x+y+z)$$

1. Montrer que $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ puis construire sa matrice représentative dans la base canonique.
2. Trouver deux réels distincts λ et μ tels que $f-\lambda\mathrm{id}_E$ et $f-\mu\mathrm{id}_E$ ne soient pas des automorphismes.
3. Montrer que $E=\mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{id}_E)\oplus\mathrm{Ker}(f-\mu\mathrm{id}_E)$.
4. Déterminer la matrice représentative de f dans une base adaptée à la somme directe précédente.

Exercice 18 — On note $E=\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ et f un endomorphisme non nul de E tel que $f^3+f=0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. On suppose que f est injective.
   a) Montrer que $f^2=-\mathrm{id}_E$.
   b) En déduire que $(e_1,f(e_1))$ est une famille libre.
   c) Trouver alors une contradiction en considérant une base de la forme $(e_1,f(e_1),u)$ et en conclure que $\mathrm{Ker}(f)\neq\{0_E\}$.
2. Justifier alors que $\dim(\mathrm{Ker}(f))\in\{1,2\}$.
3. Montrer que : $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$.
4. On pose $F=\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E)$ et on note u un vecteur non nul de F.
   a) Montrer que $f(u)\in F$ et que $(u,f(u))$ est libre.
   b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2+\mathrm{id}_E))=2$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f))=1$.
   c) On considère v un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(f)$.
   Montrer que $\mathscr{B}'=(v,u,f(u))$ est une base de E.
   d) Donner la matrice représentative de f dans $\mathscr{B}'$.

Exercice 19 — Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)=(X+1)P(X)-XP(X+1)$.

1. L'application ϕ définit-elle un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. L'application est-elle surjective ?

Exercice 20 — Soient $E=\mathbb{C}[X]$ et φ et ψ les endomorphismes de E définis par :

$$\forall P\in\mathbb{C}[X],\quad \varphi(P)=XP\quad\text{et}\quad\psi(P)=P'$$

1. Déterminer le noyau et l'image de φ et de ψ.
2. Déterminer le noyau de ψ^n où $n\in\mathbb{N}^*$ et l'image de $\psi-\alpha\mathrm{id}_E$ où $\alpha\in\mathbb{C}^*$.

Exercice 21 — *Polynômes de Newton*

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\psi:\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_n[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}_n[X]\\ P&\longmapsto&P(X+1)-P(X)\end{array}\right.$

1. Montrer que $\psi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
2. a) Exprimer le degré de $\psi(P)$ pour $P\in\mathbb{R}_n[X]$.
   b) En déduire $\mathrm{Im}(\psi)$ et $\mathrm{Ker}(\psi)$.
3. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré n.
   Montrer que $(P,\psi(P),\psi^2(P),\dots,\psi^n(P))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. a) Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $P\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :
   $$P(X+1)-P(X)=Q(X)\quad\text{et}\quad P(0)=0$$
   b) Déterminer un tel polynôme P pour $Q=X(X+1)(X+2)$.
   c) En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k+1)(k+2)$.

Exercice 22 — Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, soit φ_A l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad\varphi_A(M)=AM$$

1. Montrer que $\varphi_A\in\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ et donner sa matrice dans la base canonique.
2. Déterminer le noyau, l'image et le rang de φ_A.

Exercice 23 — Soit ξ l'application définie sur $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ par $\xi(f)=g$ avec,

$$\forall x\in[0,1],\quad g(x)=\int_0^1 f(x+t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que ξ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer le noyau de ξ. *On pourra pour cela dériver g en justifiant.*

Exercice 24 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}\, g$.
2. Montrer que $f(\text{Ker}(g \circ f)) = \text{Ker}\, g \cap \text{Im}\, f$.
3. On suppose que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que $\text{Ker}\, f$ et $\text{Im}\, f$ sont stables par g.

Exercice 25 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f, g \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}\, f \iff \text{Ker}\, g \cap \text{Im}\, f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}\, g \iff \text{Ker}\, g + \text{Im}\, f = E$

Exercice 26 — Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que : $\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2 \iff \text{Ker}\, f \cap \text{Im}\, f = \{0_E\}$
2. Montrer que : $\text{Im}\, f = \text{Im}\, f^2 \iff E = \text{Ker}\, f + \text{Im}\, f$
3. En déduire qu'en dimension finie,

$$\text{Ker}\, f = \text{Ker}\, f^2 \iff \text{Im}\, f = \text{Im}\, f^2 \iff E = \text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f$$

Exercice 27 — *Factorisation*
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
On considère deux applications $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, G)$. Montrer que :

$$\exists h \in \mathcal{L}(F, G) \text{ tel que } g = h \circ f \text{ si, et seulement si, } \text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g)$$

On pourra pour cela introduire un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ *dans* E.

Exercice 28 — *Endomorphismes nilpotents*
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotente, d'ordre de nilpotence p, c'est-à-dire que : $f^p = \tilde{0}$ et $f^{p-1} \neq \tilde{0}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{F} = (x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
   En déduire que $p \leqslant n$.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E obtenue en complétant la famille $\mathcal{F}$.
   Quelle est la forme de la matrice de f dans cette base ?
3. Que peut-on dire de la suite $(\text{rg}(f^k))_{k \in \mathbb{N}}$?
4. On suppose que $p = n$ et soit $g \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$.
   Montrer que $g \in \text{Vect}\left(\text{id}_E, f, \dots, f^{n-1}\right)$.

Exercice 29 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. Établir l'encadrement :

$$\left|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)\right| \leqslant \text{rg}(u + v) \leqslant \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$$

2. Justifier également l'inégalité : $\text{rg}(u \circ v) \leqslant \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

Exercice 30 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1. En considérant la restriction de u à $\text{Im}(v)$, démontrer que :

$$\text{rg}(v) = \text{rg}(u \circ v) + \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(v))$$

2. En déduire que : $\dim \text{Ker}(u \circ v) \leqslant \dim \text{Ker}(u) + \dim \text{Ker}(v)$.

Exercice 31 — Soit E un espace de dimension finie $2p$ avec $p \geqslant 1$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les propriétés :

(i) $\varphi^2 = 0$ et $\text{rg}(\varphi) = p$ (ii) $\text{Im}(\varphi) = \text{Ker}(\varphi)$

(iii) $\exists A \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ telle que $\begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ soit la matrice de φ dans une certaine base.

Exercice 32 — *Centres de* $\mathcal{L}(E)$ *et de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On suppose que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est liée.
   Montrer que f est une homothétie.
2. On suppose E de dimension finie. Déterminer l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec tous les autres.
   On travaillera, pour $x \neq 0_E$ quelconque, avec un projecteur sur Vect(x).
3. Retrouver ce résultat par un calcul matriciel.

Exercice 33 — *Formes linéaires sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que si pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AM) = \text{Tr}(BM)$, alors $A = B$.
2. En déduire que pour toute forme linéaire φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \text{Tr}(AM)$$

Partie D – Projecteurs et symétries vectoriels

Exercice 34 — Soient f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une projection vectorielle et g une symétrie vectorielle ; déterminer leurs caractéristiques géométriques.

Exercice 35 — On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique (e_1, e_2, e_3). On considère le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équations respectives :

$$\mathcal{P} : x + y + z = 0 \qquad \mathcal{D} : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection p sur le plan $\mathcal{P}$ parallèlement à la droite $\mathcal{D}$.
2. Faire de même avec la symétrie s par rapport à $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{D}$.

Exercice 36 — Soit p et q deux projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q + q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2. En déduire que $p+q$ est un projecteur ssi $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Exercice 37 — Soient E un espace vectoriel de dimension n, f et g deux endomorphismes de E tels que $f + g = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(f)$.
2. Que peut-on en déduire concernant $g \circ f$?
3. Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 38 — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère r projecteurs $p_1, \dots, p_r$ tels que $p_1 + \cdots + p_r = \mathrm{id}_E$.

1. Montrer, à l'aide de la trace, que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(p_1)) + \cdots + \dim(\mathrm{Im}(p_r))$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_r)$.

Exercice 39 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = 0$. On pose $r = p + q - q \circ p$.

1. Montrer que r est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\, r = \mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}\, r = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$.

Exercice 40 — Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et p, q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Montrer que $p \circ q$ est un projecteur.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, p \circ q = \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.
3. Montrer que $\mathrm{Ker}\, p \circ q = \mathrm{Ker}\, p + \mathrm{Ker}\, q$.

CCINP Exercices 60, 64, 71 et 90.