Suites et séries de fonctions

Travaux dirigés #08

Partie A – Suites de fonctions

Exercice 1 — Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où :

$$f_n : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n\mathrm{e}^{-x}+x^2}{n+x} \end{array} \right.$$

Exercice 2 — Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est définie par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_n(x)=\begin{cases} 1+x^2\sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 3 — Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n : x\mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0,\frac{\pi}{2}]$.
2. Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Qu'en déduire ?

Exercice 4 — Étudier la convergence simple puis uniforme des suites de fonctions définies par :

$$\forall x\in[0,1],\quad f_n(x)=nx^n\ln(x)\qquad\text{et}\qquad \forall x\geqslant 0,\quad g_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$$

Exercice 5 — Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note y_n la solution de l'équation différentielle $(n+1)y''-(2n+1)y'+ny=0$ vérifiant $y(0)=0$ et $y'(0)=1$.

1. Expliciter y_n et étudier la convergence simple de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice 6 — *Second théorème de Dini*
Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f. Soit enfin, pour $p\in\mathbb{N}^*$, la subdivision du segment $[a,b]$ définie par :

$$\forall k\in\{0,\dots,p\},\quad a_k=a+k\cdot\frac{b-a}{p}$$

1. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $f(a_{k+1})-f(a_k)\leqslant\varepsilon$ pour tout entier $k\in\{0,\dots,p-1\}$.
2. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a,b]$.
3. *Application* – Montrer que la suite de fonctions $\left(x\mapsto\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers exp sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 7 — Soient $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions α-lipschitzienne sur le segment $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Partie B – Séries de fonctions

Exercice 8 — Étudier la convergence simple, puis uniforme de la série de fonctions de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n(x)=\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\ ;\quad u_n(x)=\frac{1}{2^n}\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\ ;\quad u_n(x)=\frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$u_n(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\ ;\quad u_n(x)=\frac{(-1)^n}{x+n}\ (x\geqslant 0)$$

Exercice 9 — Pour $\alpha>1$ et $x>0$, on pose :

$$\zeta(\alpha)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\qquad\text{et}\qquad \eta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1. Montrer que la fonction η est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Trouver pour $x>1$ une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$ en calculant $\zeta(x)-\eta(x)$.
3. En déduire un équivalent en 1 de $\zeta(x)$.

Exercice 10 — On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th}(n)$$

1. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
   On note désormais S la somme de la série.
2. Montrer que S est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x+1) - S(x) = 1 - \operatorname{th}(x+1)$.

Exercice 11 — Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$. En déduire un développement en série de $\arctan(u)$ pour $u \in]-1,1[$ et un développement en série de $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 12 — Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ et $D = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tous $x \in D$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.
2. Montrer la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ pour tout $x \in D$.
3. Soit $f_n : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 13 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ telle que $\sum a_n^2$ converge. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n+x}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de $f(x)$.

Exercice 14 — Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x}$.
4. Établir, pour $x > 0$, l'égalité :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

5. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 15 — On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est correctement définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
   Préciser alors les variations de f.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ à l'aide d'une comparaison série-intégrale.

Exercice 16 —

1. Donner l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{1+n^2x^2}$.
   Étudier la continuité de f et donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.
2. Faire de même avec $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\operatorname{sh}(nx)}$.

Partie C – Convergence dominée et intégration terme à terme

Exercice 17 — Étudier les limites des suites de termes généraux :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 18 — On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Vérifier que le terme u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19 — Prouver l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}\,\mathrm{d}x$ pour $\alpha > 0$.

Exercice 20 — Justifier l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Exercice 21 — Montrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Exercice 22 —

1. Justifier l'existence et calculer $a_n = n\int_0^{+\infty} t^n e^{-nt}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la série de terme général a_n converge.
3. En déduire l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{(1-te^{-t})^2}\,dt$.

Exercice 23 — On pose, pour $x \in]-1,1[$,

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1 - x\cos(t)}$$

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}$.
2. Montrer que $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire un développement de $\arcsin(x)$.

Exercice 24 — Justifier l'égalité :

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} t^{\sqrt{n}}\right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$$

Exercice 25 — Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1}$$

On pourra appliquer le théorème de convergence dominée sur une certaine somme partielle.

Partie D – Approximation uniforme

Exercice 26 — *Lemme de Riemann-Lebesgue*

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)e^{int}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ continue par morceaux sur $[a,b]$. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)e^{int}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 27 — *Approximation simultanée*

1. Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$. Montrer qu'alors, pour tout $x_0 \in [a,b]$:
$$\|f-g\|_\infty \leqslant |f(x_0) - g(x_0)| + (b-a)\|f' - g'\|_\infty$$
2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{C})$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que la suite $(P'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f'.

Exercice 28 — *Approximation polynomiale de la racine carrée*
On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est polynomiale et préciser le degré de P_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \geqslant 0, \quad P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right)$$
3. Montrer que tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.
4. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, en décroissant, vers une fonction f à préciser.
5. Prouver que la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

CCINP Exercices 8 à 19 (à l'exception du 15 et du 18), 25, 26, 27, 48, 49 et 53.