Suites et séries de fonctions

Feuille d'exercices #08

Partie A – Suites de fonctions

⋆ **Exercice 1 —** Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions :

$$f_n(x) = \frac{n\mathrm{e}^{-x} + x^2}{n+x} \quad \text{et} \quad g_n(x) = nx^n \ln(x) \text{ sur } [0,1]\,; \quad h_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ sur } \mathbb{R}_+$$

⋆⋆ **Exercice 2 —** Étudier la convergence simple et uniforme des suites :

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} \text{ sur } [0,1]\,; \quad g_n(x) = x^n(1-x)^n \text{ sur } [0,1]\,; \quad h_n(x) = \cos^n\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right) \text{ sur } \mathbb{R}$$

⋆ **Exercice 3 —** Soient $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \int_0^x f(t^n)\,\mathrm{d}t$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ **Exercice 4 —** Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^{\pi/2} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Qu'en déduire ?

⋆ **Exercice 5 —** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto n^2 t\mathrm{e}^{-nt}$. Prouver de deux façons que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

⋆⋆ **Exercice 6 —** Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

1. Étudier la convergence simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. On pose $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - f_n(x)$. Montrer que $\|\delta_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}n}$ puis conclure.
   On cherchera à majorer $\delta_n(x_0)$ pour x_0 vérifiant $\delta_n'(x_0) = 0$.
3. Prouver que $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x = -\gamma$.

⋆ **Exercice 7 —** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx}\cos(nx)$.
Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ et sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 0$.

⋆⋆ **Exercice 8 —** Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$.

1. Simplifier $f_n(x)\sin\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$ et en déduire la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier sa convergence uniforme, éventuellement sur tout segment.

⋆ **Exercice 9 —** Soit $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}$.

1. Montrer que (f_n) converge simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$.
2. Calculer, de deux façons différentes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

⋆⋆ **Exercice 10 —** Soient $f_n : x \mapsto \dfrac{n}{1+n^2x^2}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, où $a < b$.
Déterminer la limite de $\int_a^b f_n(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ lorsque $n \to +\infty$.

⋆⋆ **Exercice 11 —** On définit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_0(x) = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1+u_n(x)}$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge simplement.
2. Montrer que $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Que dire de la convergence uniforme de (u_n) sur les segments de $\mathbb{R}_+^*$?

⋆⋆ **Exercice 12 —** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et bornée. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{où} \quad \varphi_n(t) = \frac{n}{\pi}\cdot\frac{1}{1+n^2t^2}$$

Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ et qu'elle converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

⋆⋆ **Exercice 13 —** Soit (u_n) une suite de fonctions continues sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, $|u_n(x)| \leqslant a_n$ où a_n est le terme général d'une série supposée convergente.

Montrer que la suite (P_n) de terme général $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(x))$ converge uniformément sur I vers une fonction continue sur I.

⋆⋆ **Exercice 14 —** On considère une suite de fonctions (f_n) définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur I vers une fonction f.

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
   Montrer que $(\varphi \circ f_n)$ converge uniformément sur I vers $\varphi \circ f$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \dfrac{f_n}{1+f_n^2}$. Que dire de la suite (g_n) ?

⋆⋆ **Exercice 15 —** *Second théorème de Dini*
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On considère une suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions croissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f. Soit enfin, pour $p \in \mathbb{N}^*$, la subdivision du segment $[a,b]$ définie par :

$$\forall k \in \{0,\ldots,p\}, \quad a_k = a + k\cdot\frac{b-a}{p}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(a_{k+1}) - f(a_k) \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $k \in \{0,\ldots,p-1\}$.
2. Montrer que la convergence de $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur $[a,b]$.
3. *Application* – Montrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers exp sur tout segment de $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆ **Exercice 16 —** *Théorème d'Ascoli (cas lipschitzien) et application*

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ supposée α-lipschitzienne.
   On suppose que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $[a,b]$.
   Montrer que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.
2. Soient $I =]a,b[$ et une suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions convexes sur I convergeant simplement vers f. Montrer que f est convexe et que la suite $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I.

Partie B – Séries de fonctions

⋆ **Exercice 17 —** Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ des séries de termes généraux $u_n(x) = \dfrac{x}{n(1+nx)}$ et $v_n(x) = \dfrac{x}{(1+nx)^2}$.

⋆⋆ **Exercice 18 —** Étudier la convergence simple puis uniforme de la série de fonctions de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\ ; \quad u_n(x) = \frac{1}{2^n}\,\mathrm{th}\left(\frac{x}{2^n}\right)\ ; \quad u_n(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-nx}}{\ln(n)}$$

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\ ; \quad u_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+n} \quad (x \geqslant 0)$$

⋆ **Exercice 19 —** Déterminer les domaines de convergence simple et uniforme de la série de terme général $u_n(x) = (-1)^n\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$. Calculer sa somme.

⋆ **Exercice 20 —** Soient $\alpha > 0$ et $u_n(x)$ défini sur $\mathbb{R}_+$ par $u_n(x) = n^2x^\alpha\mathrm{e}^{-nx^2}$.

1. Étudier la convergence simple et normale de $\sum u_n$ sur $[0,+\infty[$.
2. En cas de convergence, quel est le domaine de continuité de la somme ?
3. Étudier la somme au voisinage de 0.

⋆⋆ **Exercice 21 —** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs.
On pose alors $u_n(x) = a_nx^n(1-x)$. Montrer que :

- $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
- $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\dfrac{a_n}{n}$ converge.
- $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ si et seulement si $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆⋆ **Exercice 22 —** Soit $a > 0$. On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\dfrac{a}{n^2x^2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Donner un équivalent en 0 et $+\infty$ de f.

⋆ **Exercice 23 —** Pour $\alpha > 1$ et $x > 0$, on pose $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

1. Déterminer la limite ζ en $+\infty$ et trouver un équivalent en 1^+.
2. Montrer que la fonction η est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Trouver pour $x > 1$ une relation entre $\zeta(x)$ et $\eta(x)$.
4. Retrouver un équivalent en 1^+ de $\zeta(x)$.

⋆ **Exercice 24 —** Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi\sqrt{x}$.

⋆ **Exercice 25 —** On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
2. Déterminer un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

⋆⋆⋆ **Exercice 26 —** On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et établir sa continuité.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Y a-t-il convergence normale sur $\mathbb{R}$? convergence uniforme ?

⋆⋆ **Exercice 27 —** Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ puis de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Justifier la décroissance de f puis que pour tout $x > 0$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.
3. Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

⋆⋆ **Exercice 28 —** On pose, pour tout $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$.

Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puis que $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

⋆⋆ **Exercice 29 —** Soit, pour tout $x > 0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(x+n)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que f est définie, continue et à valeurs positives.
2. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et préciser ses variations.
3. Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$.
4. En déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0.

⋆⋆ **Exercice 30 —** On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x \ln(n)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la continuité de f puis trouver un équivalent de $f(x)$ en 1^+.

⋆ **Exercice 31 —** On considère, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \mathrm{th}(x+n) - \mathrm{th}(n)$$

1. Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum_{n\geqslant1} f_n$. On note S sa somme.
2. Montrer que S est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x+1) - S(x) = 1 - \mathrm{th}(x+1)$.

⋆⋆ **Exercice 32 —** On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \quad \text{et}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de la forme $[0,a]$, où $a > 0$, puis justifier la continuité de sa somme S sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $S(x) = u_0(x) + \mathrm{e}^x \int_0^x \mathrm{e}^{-t} u_0(t)\,\mathrm{d}t$.

⋆ **Exercice 33 —** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ et $f_n : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$.

1. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, $|S_n(x)| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.
2. Prouver que $\sum f_n$ converge unif. sur tout segment inclus dans $]0, 2\pi[$.

⋆ **Exercice 34 —** Justifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} t^{\sqrt{n}}\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$.

⋆⋆ **Exercice 35 —** On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!^2}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$, $\phi_x : t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \mathrm{e}^{ikt}$ et $I_n(x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(t) \mathrm{e}^{-int} \,\mathrm{d}t$.
   a) Calculer $I_n(x)$ puis, de deux façons différentes, $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\phi_x(t)|^2 \,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x\cos(t)} \,\mathrm{d}t$.

⋆⋆⋆ **Exercice 36 —** *Théorème de Bohr-Mollerup*

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : x \mapsto x \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

1. Justifier la convergence simple de $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $f : x \mapsto -\ln(x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Prouver que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

   (i) $\forall x > 0, \quad f(x+1) - f(x) = \ln(x)$ (ii) $f(1) = 0$ (iii) f convexe sur $\mathbb{R}_+^*$
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

⋆⋆⋆ **Exercice 37 —** Soit $f_0(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 - n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

1. Montrer que la somme f de cette série est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire, 1-périodique et qu'elle vérifie $2f(2x) = f(x) + f\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\mathbb{Z}}{2}$.
2. Montrer que $g : x \mapsto f(x) - \pi\mathrm{cotan}(\pi x)$ est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$. En considérant $\max\limits_{[0,1]} |g|$ sur $[0,1]$, montrer que g est nulle.
3. En déduire que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right)$.

Partie C – Approximation uniforme

⋆ **Exercice 38 —** *Lemme de Riemann-Lebesgue*

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{K})$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t) \mathrm{e}^{int} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}_{\text{p.m.}}([a,b], \mathbb{K})$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t) \mathrm{e}^{int} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆ **Exercice 39 —** *Théorème des moments*

Que peut-on dire de $f \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t) \,\mathrm{d}t = 0$?

⋆ **Exercice 40 —** *Approximation simultanée*

1. Soient $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{C})$. Montrer qu'alors, pour tout $x_0 \in [a,b]$:
$$\|f - g\|_\infty \leqslant |f(x_0) - g(x_0)| + (b-a)\|f' - g'\|_\infty$$
2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{C})$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a,b]$ vers f telle que la suite $\left(P'_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f'.

⋆⋆ **Exercice 41 —** *Approximation polynomiale de la racine carrée*

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes définie par $P_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est polynomiale et préciser le degré de P_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \geqslant 0, \quad P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \left(P_n(x) - \sqrt{x}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(P_n(x) + \sqrt{x}\right)\right)$$
3. Montrer que tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant P_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x}$.
4. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$, en croissant, vers une fonction f à préciser.
5. Prouver que la convergence de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme.

⋆⋆⋆ **Exercice 42 —** *Produit de convolution et approximation de l'unité*
On note $\mathscr{E}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ nulles en dehors d'un segment. On définit alors, pour tous $f, g \in \mathscr{E}$, l'application $f * g$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{E}$. Prouver qu'elle est commutative et distributive par rapport à l'addition.
2. On appelle approximation de l'unité toute suite (e_n) de fonctions positives de $\mathscr{E}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e_n(t)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0, \quad \int_{|t| \geqslant \alpha} e_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   Montrer que pour tout $f \in \mathscr{E}$ et toute approximation $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'unité, $(f * e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.
3. On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad e_n(t) = \frac{(1-t^2)^n}{\lambda_n} \text{ si } |t| \leqslant 1,\ e_n(t) = 0 \text{ sinon}$$

   a) Vérifier que (e_n) est une approximation de l'unité puis que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{E}$ nulle en dehors de $[-1/2, 1/2]$, $f * e_n$ est polynomiale.
   b) En déduire le théorème de Weierstrass.

⋆⋆ **Exercice 43 —** Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales réelles convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f.
Montrer que f est une fonction polynomiale.

⋆⋆⋆ **Exercice 44 —** *Approximation uniforme polynomiale sur* $\mathbb{R}$
Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions polynomiales réelles, toutes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'équivalence des assertions suivantes :

(i) il existe $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts tels que si $i \in [\![0, n]\!]$, $(P_k(x_i))_{k\in\mathbb{N}}$ converge ;

(ii) la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$;

(iii) la suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

On montrera que la limite de $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est polynomiale, de degré au plus n.