1 | Séries numériques

« Une idée qui ne peut servir qu'une seule fois est une astuce.
Sinon, elle devient une méthode. »
G. Polya

Plan de cours

I | Rappels sur les suites numériques

A – Suites classiques

1 – Suites arithmétiques de raison $r \in \mathbb{C}$

Il s'agit des suites définies par $u_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2 – Suites géométriques de raison $q \in \mathbb{C}$

Il s'agit des suites définies par $u_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q\,u_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ si } q \neq 1. \quad \text{Si } q = 1, \ \sum_{k=0}^{n} q^k = n+1.$$

De manière plus générale,

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} \text{ pour } q \neq 1$$

3 – Suites arithmético-géométriques

Il s'agit des suites définies par $u_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\,u_n + b$ avec $a \neq 1$.
Pour obtenir une expression explicite :

- On recherche la limite éventuelle de la suite. Si la suite converge vers ℓ, alors $\ell = a\ell + b$ donc $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison a. En effet, quel que soit l'entier naturel n,

$$u_{n+1} - \ell = a\,u_n + b - (a\ell + b) = a(u_n - \ell)$$

  D'où $v_n = a^n v_0 = a^n(u_0 - \ell)$. On conclut alors en écrivant $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 3$. Expliciter u_n en fonction de n.

4 – Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Il s'agit des suites définies par $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$.
On résout l'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ.

- Si $\Delta > 0$ alors on obtient deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si $\Delta = 0$ alors on obtient une racine double r.

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + n\mu) r^n$$

- Si $\Delta < 0$ alors on obtient deux racines complexes conjuguées $\rho \mathrm{e}^{\pm i\theta}$.

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = 0$$

Déterminer u_n en fonction de n.

Deux suites sont égales si et seulement si elles vérifient la même relation de récurrence et ont même(s) condition(s) initiale(s).

B – Convergence des suites numériques

Toutes les suites considérées dans les paragraphes suivants sont considérées à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 – Borne supérieure

Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe M appelé majorant tel que :

$$\forall x \in A \quad x \leqslant M$$

On appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants lorsque celui-ci existe.

Théorème 1.1 : Théorème de la borne supérieure

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Exemple

L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 2\}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{Q}$.

2 – Convergence d'une suite

Définition 1.2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

On dit qu'elle diverge vers $+\infty$ si,

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow u_n > A$$

Proposition 1.3 : Unicité de la limite

La limite d'une suite lorsqu'elle existe est unique.

Une suite convergente est nécessairement bornée mais attention, la réciproque est fausse. On peut penser par exemple à $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\cos(n))_{n \in \mathbb{N}}$.

On rappelle que si une suite réelle converge vers une limite $\ell > 0$, alors u_n est strictement positif à partir d'un certain rang.

3 – Comment prouver qu'une suite converge/diverge ?

Théorème 1.4 : Comparaisons

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles. Supposons qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers un même réel ℓ, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$;
- si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Théorème 1.5 : Limite monotone

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe. De plus,

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ ;
- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Théorème 1.6 : Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.
- $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Théorème 1.7 : Suites extraites

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in\mathbb{C}$ alors toute suite extraite (du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante) converge vers ℓ.

On peut ainsi montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge en montrant que les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ou convergent vers des limites distinctes.

Mentionnons également le résultat suivant en lien avec les suites extraites. S'il n'aide pas à déterminer la nature d'une suite, il est néanmoins capital et nous le recroiserons au cours de l'année.

Théorème 1.8 : Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

C – Relations de comparaison

Définition 1.9 : Équivalence, négligeabilité et domination

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques où $v_n\neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=0$. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est bornée. Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ. De plus, si deux suites sont équivalentes, les termes généraux sont de même signe à partir d'un certain rang.

Rappelons les résultats classiques dits de « croissances comparées » pour $\alpha,\beta\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln^\alpha(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^\beta); \quad n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\beta n}) \text{ et même pour } x>1,\ n^\alpha \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^{\beta n})$$

Théorème 1.10 : Lien entre équivalence et négligeabilité

Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$$

Cette propriété justifie que l'on peut obtenir un équivalent à l'aide du premier terme non nul d'un développement limité. Voici pour mémoire les développements limités usuels à connaître.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\mathrm{ch}\, x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n})$$

$$\mathrm{sh}\, x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^4)$$

Exercice 3

Déterminer la limite ℓ en $+\infty$ de $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ puis donner un équivalent de $u_n - \ell$.

II | Généralités sur les séries numériques

A – Définitions et premières propriétés

Définition 1.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On appelle somme partielle au rang n le terme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum u_n$.
- Lorsque la suite (S_n) converge, on dit que la série de terme général u_n converge et on appelle *somme de la série* la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Notation : $S = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Lorsqu'elle converge, on appelle reste au rang n la différence

$$R_n = S - S_n = \sum_{k>n} u_k \text{ où } S = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Lorsqu'une série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

En cas de convergence, $R_n = S - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On remarquera qu'on ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Proposition 1.12 : Opérations sur les séries

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

L'ensemble des séries numériques convergentes est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire de la nature de $\sum(u_n + v_n)$.

Proposition 1.13

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Démonstration

On note S_n la somme partielle de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

$S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)=u_n-u_0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ■

Cette dernière propriété va nous fournir de nouvelles armes pour étudier les suites.

B – Divergence grossière

Théorème 1.14 : Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration

On suppose que $\sum u_n$ converge et on note S sa somme.

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad S_n-S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k=u_n$$

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S-S=0$. ■

Par contraposée, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (la divergence est alors qualifiée de grossière).

Attention, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série harmonique $\sum\frac{1}{n}$ que nous étudierons peu après. Moralité : quand on veut prouver la convergence d'une série, la question n'est pas tant de savoir si le terme tend vers 0, mais plutôt à quelle vitesse.

C – Calcul direct

On peut dans certains cas (peu fréquents) calculer la somme partielle au rang n avant de conclure en passant à la limite.

Théorème 1.15 : Série géométrique

Soit $x\in\mathbb{C}$. $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x|<1$. Dans ce cas, sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$.

Démonstration

Pour $x\neq 1$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Cette quantité admet une limite finie si et seulement si $|x|<1$.

Pour $x=1$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}1=n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge. ■

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

Exemple

Montrons que la série $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ converge et déterminons sa somme.

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$

Exercice 4

❶ Montrer que : $\forall x,y\in]0,+\infty[,\ \arctan x-\arctan y=\arctan\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

❷ Montrer que pour tout entier n, $n^4+n^2+1=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

❸ En déduire la nature de la série $\sum\arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$.

III | Séries à termes positifs

Une série de terme général réel u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Théorème 1.16

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs au moins à partir d'un certain rang. Par définition, $\sum u_n$ converge ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. En effet, $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$. Si elle est majorée, elle converge. Si elle ne l'est pas, elle diverge vers $+\infty$. ■

Exemple – Divergence de la série harmonique (1)

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, diverge.

Posons pour cela $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut constater que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si la série convergeait, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtiendrait $0 \geqslant 1/2$, absurde ! Donc la série harmonique diverge, et même vers $+\infty$ puisqu'il s'agit d'une série est à termes positifs.

A – Règle de majoration

Théorème 1.17 : Majoration

On suppose qu'à partir d'un certain rang p, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$.

Démonstration

On ne change pas la nature d'une série en changeant ses premiers termes.
Supposons donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. Supposons que $\sum v_n$ converge vers S'.
$\forall n \geqslant 0,\ S_n \leqslant S'_n$. De plus, $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par S'. Donc,

$$\forall n \geqslant 0 \quad 0 \leqslant S_n \leqslant S'.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée donc la série à termes positifs $\sum u_n$ converge. ■

Corollaire 1.18

Sous les mêmes hypothèses, $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Exemple

Montrons que la série de terme général $\frac{1}{(2n+2)3^n}$ converge.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \frac{1}{(2n+2)3^n} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$.

Ne pas oublier de vérifier que $u_n \geqslant 0$!

Exercice 5

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\ln(n)}{n2^n}$.

Le théorème précédent est-il encore valable pour des séries à termes négatifs ?

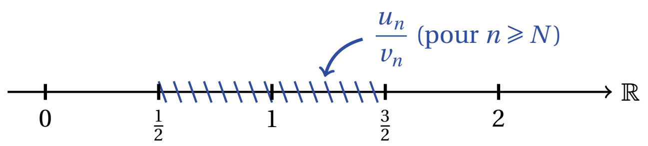
B – Règle des équivalents

Théorème 1.19 : Équivalents

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs (à partir d'un certain rang).
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant N$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.



Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive (au moins à partir d'un certain rang),

$$\forall n \geqslant N, \quad 0 \leqslant \frac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \frac{3}{2} v_n$$

Par comparaison, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$ et réciproquement. ■

Exercice 6

Quelle est la nature de $\sum \dfrac{n+5}{(2^n - n)\sqrt{n^2+4}}$?

Exemple – Divergence de la série harmonique (2)

Déterminons la nature de $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et déduisons-en celle de $\sum \dfrac{1}{n}$.
Remarquons tout d'abord que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln(k)\right] = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

D'où la divergence de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1+\dfrac{1}{n} \geqslant 1$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$. De plus, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ donc ces deux séries à termes positifs sont de même nature, elles divergent.

Exercice 7

Montrer à l'aide de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Exemple – Vers un développement asymptotique de la série harmonique

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en justifiant que la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge.
Pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Comme $\ln(1-x) \underset{x\to0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^2}$.
La convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ nous assure, d'après le théorème précédent, la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette limite, notée γ, est appelée constante d'Euler. On a montré que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$$

C – Comparaison séries/intégrales (⋆)

Nous allons généraliser la technique d'encadrement vue l'an dernier. Commençons par l'étude d'un exemple classique.

Exemple – Divergence de la série harmonique (3)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. Remarquons que pour tout réel $t \in [k,k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
Donc par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{puis, en sommant, } \ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Donc par comparaison, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Essayons maintenant de généraliser cette technique d'encadrement. Pour cela, nous aurons besoin, contrairement à l'an dernier, d'intégrer des fonctions sur des intervalles non bornés, du type $[a,+\infty[$.

Définition 1.20 : Intégrale impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale impropre converge et on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

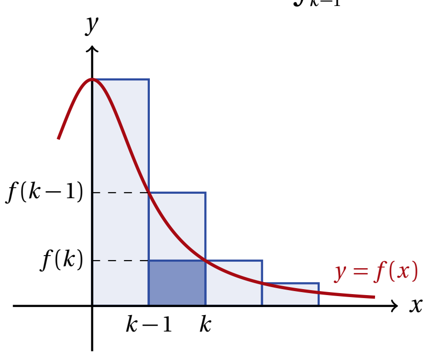
Théorème 1.21 : Comparaison séries/intégrales

Soit f une application continue par morceaux, positive et décroissante sur $[a,+\infty[$.
Alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.
En particulier, la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration

La nature d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, prenons pour simplifier $a=0$.

- Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)$ et montrons que $\sum u_k$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.



Comme f est supposée continue par morceaux et décroissante,

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1) \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant u_k \leqslant f(k-1) - f(k)$$

En sommant jusqu'à n, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant f(0) - f(n) \leqslant f(0)$ (f positive).

En tant que série à termes positifs majorée, $\sum u_n$ converge, disons vers une limite que l'on notera par la suite ℓ.

- Comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k)$, le résultat précédent nous permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - \ell + \mathrm{o}(1)$$

  - Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie donc il en va de même pour $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$.
  - Si $\sum f(n)$ converge, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie. La fonction *croissante* $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc majorée, elle converge. ■

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

Lemme 1.22

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Remarquons que $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

- Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha>1 \\ +\infty \text{ si } \alpha<1 \end{cases}$
- Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. ■

Théorème 1.23 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Remarquons que pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Supposons donc $\alpha > 0$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. La série converge donc si et seulement si $\alpha > 1$. ■

Exercice 8

Trouver la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et en donner une approximation à 10^{-3} près.

D – De nouvelles règles de comparaison ($\star$)

Théorème 1.24 : Règle du « grand O »

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Il existe $K \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant K\,v_n$.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge. ■

Théorème 1.25 : Règle du « petit o »

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Corollaire 1.26

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercice 9

Déterminer la nature des séries :

$$\sum \mathrm{e}^{-n^2}\ ;\quad \sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\ ;\quad \sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$$

On peut montrer que $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$ avec $\alpha \leqslant 1$ pour montrer que $\sum u_n$ diverge.

E – Règle de d'Alembert ($\star$)

Théorème 1.27 : Règle de d'Alembert

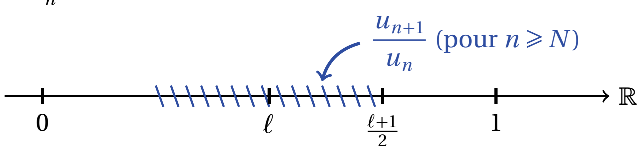
On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes *strictement positifs* à partir d'un certain rang et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty]$$

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire. (cas douteux)

Démonstration

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite à termes positifs (u_n) est strictement croissante. Elle ne peut donc converger vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell < 1$, on procède à une comparaison avec une série géométrique.
  À partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{\ell+1}{2}$ (revenir pour cela à la définition de la limite et choisir le bon ε).



Comme $u_n > 0$, $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right) u_n \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^2 u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Le dernier terme est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{\ell+1}{2} < 1$ donc par comparaison, la série converge. ■

Cette règle est très pratique lorsqu'on travaille avec des séries dont le terme général fait intervenir des puissances et des factorielles. Attention cependant aux cas douteux.

Exemples (cas douteux)

Considérer les deux séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Exemple (cas intéressant)

Déterminons la nature de $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

Il s'agit d'une série à termes strictement positifs, on applique la règle de d'Alembert à $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1$$

Donc la série converge d'après la règle de d'Alembert.

F – Sommation des relations de comparaison ($\star$)

Théorème 1.28 : Comparaison des restes de deux séries à termes positifs convergentes

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. On note R_n et R'_n leurs restes respectifs au rang n.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(R'_n\right)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(R'_n\right)$.

Démonstration

On suppose les deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes.

- Cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Il existe $K \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant K\,v_n$. Pour tout $p \geqslant n_0$,

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \leqslant K \sum_{n=p+1}^{+\infty} v_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad R_p \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(R'_p\right)$$

- Cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. On adapte la raisonnement précédent en remplaçant K par $\varepsilon > 0$ arbitraire.
- Cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. On conclut en remarquant que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. ■

Exemple

Recherchons un équivalent du reste de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}$,

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sum_{n=p+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{p+1}$$

Ainsi, le reste au rang p est équivalent à $\frac{1}{p}$.

Exemple – Développement asymptotique de la série harmonique, le retour

Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

- Nous avions vu que pour $n \geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
  La convergence de la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ impliquait celle de la suite (u_n), d'où la relation :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

- Poussons un peu le développement grâce au théorème précédent.
  Les restes des séries à termes positifs convergentes $\sum (u_{n-1} - u_n)$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ sont équivalents. On a ainsi :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (u_{p-1} - u_p) = u_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2p^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

  Ainsi, $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 1.29 : Comparaison des sommes de deux séries à termes positifs divergentes

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs divergentes. On note S_n et S'_n leurs sommes partielles respectives au rang n.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S'_n$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(S'_n\right)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(S'_n\right)$.

Démonstration

On suppose les deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergentes. Comme dans la démonstration précédente, on peut se contenter d'étudier le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, le reste en découle.
Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M\,v_n$. On a donc, pour tout $n > n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + M \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0} (u_k - M\,v_k)}_{\text{cste} \,/\, n} + M \underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{=S'_n}$$

Par hypothèse $S'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $\dfrac{1}{S'_n}\cdot\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M v_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang n_1,

$$\frac{1}{S'_n}\cdot\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M v_k) \leqslant M \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M v_k) \leqslant M S'_n$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 2M \sum_{k=0}^{n} v_k$. Le résultat est démontré. ■

IV | Séries absolument convergentes

Définition 1.30 : Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1.31

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration

- *Cas des séries à termes réels*

  Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ donc :

  $$0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

  Par comparaison de séries à termes positifs,

  $$\sum |u_n| \text{ converge} \implies \sum (u_n + |u_n|) \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

- *Cas des séries à termes complexes*

  On remarque tout d'abord que $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$.

  Par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum |u_n|$ converge, il en va de même pour $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$.

  Comme ces deux dernières séries sont à termes réels, le point précédent nous garantit la convergence de $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et de $\sum \mathrm{Im}(u_n)$. Bref, $\sum u_n$ converge. ■

La réciproque est fausse. On appelle série semi-convergente une série convergente qui n'est pas absolument convergente. Nous verrons par exemple que la série harmonique alternée $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Exercice 10

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exemple fondamental – la série exponentielle

On démontre aisément que la série $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Calculons maintenant sa somme.

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$.
  On rappelle qu'alors,

  $$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n \right| \leqslant M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{(inégalité de Taylor-Lagrange)}$$

- Appliquons ce résultat pour $a = 0$, $b = 1$ et $f(t) = \mathrm{e}^{tz}$ où $z \in \mathbb{C}$, f étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Or $f^{(n+1)}(t) = z^{n+1}\mathrm{e}^{tz}$, donc $\displaystyle\left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\mathrm{e}^{tz}| \cdot \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\displaystyle\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 1.32 : Inégalité triangulaire

Si la série de terme général u_n converge absolument, alors :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Supposons que la série de terme général u_n converge absolument. Remarquons tout d'abord que l'inégalité précédente a un sens : les deux séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent. Par inégalité triangulaire,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$$

Il n'y a plus qu'à passer à la limite! ■

V | Séries alternées ($\star$)

Définition 1.33

On appelle série alternée une série de la forme $\sum (-1)^n \alpha_n$ où $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 1.34 : Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ une série alternée avec :

(i) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de signe positif ; (ii) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ; (iii) $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors la série $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge et $|R_n| = |S - S_n| \leqslant \alpha_{n+1}$. R_n est par ailleurs du signe du premier terme « négligé ».

Démonstration

Étudions la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n = (-1)^n \alpha_n$ et (α_n) positive, décroissante et de limite nulle.

On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha^k$.

- Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
  - $S_{2n+2} - S_{2n} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+1} \leqslant 0$ par décroissance de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
  - $S_{2n+3} - S_{2n+1} = \alpha_{2n+2} - \alpha_{2n+3} \geqslant 0$ par décroissance de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
  - $S_{2n+1} - S_{2n} = -\alpha_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite S. Ainsi, $\sum u_n$ converge vers S.
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n-1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ et $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ D'où, $0 \leqslant S - S_{2n-1} \leqslant \alpha_{2n}$ et $\alpha_{2n+1} \leqslant S - S_{2n} \leqslant 0$.
  On a donc $|R_{2n-1}| \leqslant \alpha_{2n}$. De même, on montre que $|R_{2n}| \leqslant \alpha_{2n+1}$. ■

Exemple (série harmonique alternée)

Il s'agit de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$. Cette série ne converge pas absolument mais d'après le théorème précédent, elle converge.

On va de plus montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$. En effet, $\dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k + \frac{(-x)^n}{1+x}$. Donc par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln 2 = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

De plus, $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $\left|\dfrac{(-x)^n}{1+x}\right| \leqslant x^n$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, en passant à la limite,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = -\ln(2)$$

On sait même, en utilisant les notations précédentes, que $0 \leqslant R_9 = -\ln(2) - S_9 \leqslant \frac{1}{10}$; ce qui signifie que $S_9 = \sum_{k=1}^{9} \frac{(-1)^k}{k}$ est positive et est une approximation de $-\ln(2)$ à 0,1 près.

Exercice 11

Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 12

Pour quelles valeurs de α la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ converge-t-elle ?

VI | Étude d'une série numérique – synthèse