Suites et séries numériques

Travaux dirigés #01

Partie A – Suites numériques

Exercice 1 — Prouver la convergence et trouver la limite des suites définies par :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor\ ; \quad v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}\ ; \quad w_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}^{-1} \quad (x\in\mathbb{R})$$

Exercice 2 — Soit $t\in\mathbb{R}$. Déterminer la limite de :

$$u_n = \frac{1}{2i}\left[\left(1+i\frac{t}{n}\right)^n - \left(1-i\frac{t}{n}\right)^n\right]$$

Exercice 3 — Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes :

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n\ ; \quad \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ ; \quad \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\cdot\pi\right)\ ; \quad \sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$$

Exercice 4 — On pose $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$.

Étudier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $P=\prod_{k=1}^{+\infty}u_k$. *On pourra écrire, en justifiant,* $u_n=\cos(\theta_n)$.

Exercice 5 — On suppose qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée vérifie :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leqslant u_{n+1}+u_{n-1}$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout entier n, $v_n=u_{n+1}-u_n$.
Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 6 — Étudier les trois suites récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} u_0\in\,]-1,+\infty[\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}\end{cases} \quad \begin{cases} v_0\in[0,+\infty[\\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}=\dfrac{3}{1+3v_n}\end{cases} \quad \begin{cases} w_0={}^1\!/_2 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ w_{n+1}=1-w_n^2\end{cases}$$

Exercice 7 — *Variations autour du lemme de Cesàro*

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $\ell\in\mathbb{R}$.

   Montrer que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ puis que $\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
   a) On suppose que $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrer que $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
   b) En déduire que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 8 — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ \forall n\in\mathbb{N}, \quad u_{n+1}=\sqrt{8+\dfrac{u_n^2}{2}}\end{cases}$$

1. Prouver la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note α sa limite.
2. Écrire une fonction Python permettant d'afficher les 15 premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. À l'aide du théorème des accroissements finis, déterminer un majorant de $|u_n-\alpha|$ dépendant de n. Comment calculer α à 10^{-4} près ?
4. Écrire une fonction Python permettant d'obtenir une telle approximation.

Exercice 9 — On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence :

$$\begin{cases} u_0\in\,]0,\pi[\\ u_{n+1}=\sin(u_n) \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. Montrer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
2. Montrer que :
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{u_n^2}+\frac{1}{3}+\mathrm{o}(1)$$
3. En déduire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.

   On pourra employer un théorème de sommation ou le lemme de Cesàro.

Exercice 10 — Déterminer un développement asymptotique à la précision $\frac{1}{n^3}$ de la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{e^{-x_n}}{n+1}$$

Exercice 11 — *Suite définie implicitement (1)*

1. Pour tout $n \geqslant 3$, montrer que l'équation $x^n - nx + 1 = 0$ admet une unique racine dans $]0,1[$ (notée x_n) et une unique racine dans $]1,+\infty[$ (notée y_n).
2. Donner un équivalent de x_n.
3. Donner la limite ℓ de y_n ainsi qu'un équivalent de $y_n - \ell$.

Exercice 12 — *Suite définie implicitement (2)*

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ admet une unique solution notée u_n dans $\left[2n\pi, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$. On pose alors $x_n = u_n - 2n\pi$.
2. Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ puis trouver un équivalent.

Exercice 13 — On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.
Donner un développement asymptotique de I_n à la précision $\frac{1}{n^2}$.

Partie B – Séries numériques

Exercice 14 — *Divergence de* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

1. Montrer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ la double inégalité suivante :

$$2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

2. En déduire les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$

Exercice 15 — Étudier la convergence des séries proposées en précisant la limite de la suite des sommes partielles.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+2)}\ ; \quad \sum_{n\geqslant 3} \frac{4n-3}{n(n^2-4)}\ ; \quad \sum_{n\geqslant 0} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$$

Exercice 16 —

1. Établir la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} (n - (-1)^n)3^{-n}$.
2. a) Justifier la convergence et calculer, à l'aide d'une intégrale, la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
   b) Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\frac{1}{x^3+1} = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2-x+1}$.
   En déduire la somme de la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

Exercice 17 —

1. On considère la série de terme général $u_n = \sin\left((2-\sqrt{3})^n \pi\right)$.
   Montrer qu'elle est à termes positifs puis étudier sa convergence.
2. On pose $A_n = (2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n$. Montrer que A_n est un entier pair.
3. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \sin\left((2+\sqrt{3})^n \pi\right)$.

Exercice 18 — Étudier la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad b_n = \frac{e^n}{n!} \qquad c_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$$

$$d_n = \frac{1}{n}(2 - \sqrt[n]{3})^n \qquad e_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad f_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

$$g_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right) \qquad h_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \qquad j_n = \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\cdot\pi\right)$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n) + (-1)^n} \qquad p_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \qquad q_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Exercice 19 — Étudier, éventuellement en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{\ln^2 n}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \qquad b_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^3 n} \quad (\alpha \neq 1) \qquad c_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$$

$$d_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n} \qquad e_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n} \qquad f_n = \frac{\pi}{2} - \arctan(n^\alpha) \quad (\alpha > 0)$$

$$g_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} \qquad h_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) \qquad j_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Exercice 20 — *Séries de Bertrand*
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ pour que la série suivante converge :

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$$

Exercice 21 — Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(n!\pi e)$.
On pourra écrire $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$.

Exercice 22 — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum \left[\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\right]$$

Calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 23 — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} - \ln(n)$$

Exercice 24 — Donner un équivalent en $+\infty$ de u_n et v_n avec :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

Exercice 25 —

1. Donner un équivalent simple de $\frac{\ln(2n)}{2n} - \frac{\ln(2n+1)}{2n+1}$.
2. Encadrer $\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\ln(k)}{k^2}$ à l'aide d'intégrales.
3. Prouver la convergence de $\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2}$ et donner un équivalent du reste.

Exercice 26 — On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\ln(n+1) - \ln(n)}{n}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge. On pose alors pour $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
2. Trouver un équivalent de R_n en $+\infty$.
3. À l'aide d'un équivalent de $u_k - \frac{1}{k(k+1)}$, trouver un développement asymptotique de R_n de la forme :
$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
4. En déduire un équivalent $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{k(k+1)}$.

Exercice 27 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

1. On suppose $0 < \ell < 1$. Retrouver la convergence de $\sum a_n$.
Soit $k \in]\ell, 1[$. Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel :
$$0 < R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p \leqslant \frac{a_{n+1}}{1-k}$$
En déduire un équivalent de R_n.
2. On suppose que $\ell > 1$. Trouver un équivalent de $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

3. On suppose que $\ell = 0$. Montrer que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_{n+1}$.
4. On suppose $\ell = +\infty$. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} a_n$.
5. Trouver des équivalents de :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \ ; \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\ln^2(k)}{k!} \ ; \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{\sqrt{k}}$$

Exercice 28 — *Transformation d'Abel*

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.
2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.
   a) Justifier la convergence absolue de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$.
   b) En déduire celle de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$.
   c) Prouver enfin la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.
3. *Application 1* – Établir la convergence de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. *Application 2* – Étudier la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ en fonction de $(\alpha, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 29 — *Règle de Raabe-Duhamel*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

1. On suppose $\alpha < 1$. Montrer que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$ et donner la nature de $\sum u_n$.
2. On suppose désormais $\alpha > 1$.
   a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$.
   b) Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $v_n = \frac{1}{n^\beta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver $\mu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\mu}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   c) À l'aide des deux questions précédentes, en choisissant correctement β, montrer que $\sum u_n$ converge.
3. *Application* – Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $u_n = \sqrt{(n-1)!} \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$.
   Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

CCINP Exercices 1, 5, 6, 7, 43, 46 et 55.