

Résumé 4 – Suites numériques et vectorielles

Suites numériques classiques

- Suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

- Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = qu_n \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

- Suite arithmético-géométrique

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = au_n + b \quad (a \neq 1) \end{cases}$$

On note ℓ le point fixe de la suite : $\ell = a\ell + b$. $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a et $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$.

- Suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ .

- (i) Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 .

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- (ii) Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r .

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + n\mu)r^n$$

- (iii) Si $\Delta < 0$, deux racines complexes $\rho e^{\pm i\theta}$.

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$$

Convergence des suites numériques

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne ici une suite à valeurs dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

La limite, lorsqu'elle existe, est unique. Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fautive.

→ Cas des suites réelles

Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Théorème : Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Outre les théorèmes de comparaison et des gendarmes, le théorème suivant est à connaître.

Théorème : Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

- (i) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante.
- (ii) $u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

→ Suites extraites et valeurs d'adhérence

Toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante est appelée suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a $\varphi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ puisque $\varphi(n) \geq n$.

Théorème

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite converge vers ℓ .

Théorème : Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Relations de comparaison

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites numériques réelles avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on dit que :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$;

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$;

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si $\frac{u_n}{v_n}$ est borné.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ .

De plus, si deux suites sont équivalentes, les termes généraux sont de même signe à partir d'un certain rang.

Théorème

Pour deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$$

Suites vectorielles

On note $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel normé de dimension quelconque.

→ Convergence d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que :

- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$.
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

On dit qu'elle diverge sinon.

On remarquera que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition

- La limite d'une suite, lorsqu'elle existe est unique.
- Toute suite convergente est bornée.

L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace.

Proposition

Soient p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) . On pose $E = E_1 \times \dots \times E_p$ et on munit E de la norme produit notée N . Une suite $u = (u_1, \dots, u_p)$ de E converge si, et seulement si, chaque suite u_i converge dans E_i . Dans ce cas,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{1,n}, \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{p,n} \right)$$

Une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge. Ainsi,

- pour étudier une suite à valeurs dans \mathbb{K}^p , on se ramènera à l'étude des p suites composantes (elles, à valeurs dans \mathbb{K}).
- pour déterminer la nature d'une suite à valeurs dans \mathbb{C} , on pourra étudier la convergence des parties réelle et imaginaire.

→ Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition : Suite extraite

On appelle suite extraite ou sous-suite d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E toute limite d'une sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition

Une suite converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ .

La limite est donc l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente. Ainsi, une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Si K est une partie compacte de E , toute suite admet au moins, par définition, une valeur d'adhérence dans K .

Résumé 4 – Séries numériques et vectorielles

Sommes classiques

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Si } q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ et } \sum_{k=p}^n q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ et } x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Convergence des séries numériques

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée à valeurs dans \mathbb{K} .
On appelle :

- somme partielle au rang n le terme $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
- série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, notée $\sum u_n$.
- somme de la série de terme général la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

La série de terme général u_n est dite convergente lorsque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On appelle alors :

- somme de la série la limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Notation : $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

- reste au rang n la différence $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Petit passage en revue des techniques au programme permettant de déterminer la nature d'une série.

→ Divergence grossière

Théorème

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (de manière grossière).

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple $\sum \frac{1}{n}$.

→ Calcul direct

Théorème : Série géométrique

$\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (pour $x \in \mathbb{C}$).
Dans ce cas, sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$.

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

Proposition

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Application au développement asymptotique de la série harmonique.

→ Cas des séries à termes positifs

Attention, ces résultats ne sont valables que pour des séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang).

Théorème

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs. Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Théorème : Règle de majoration

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

(i) $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge.

Et alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge.

Théorème : Règle des équivalents

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$. Alors, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes *strictement* positifs vérifiant de plus $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème : Comparaison séries/intégrales

Si $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue, positive et décroissante, $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Ce théorème fournit de nouvelles séries de référence.

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème : Règles du petit o et du grand O

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.

- Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge (absolument).
- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge (absolument)

On peut comparer les *restes* de deux séries à termes positifs *convergentes* :

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n$.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(R'_n)$.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ alors $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(R'_n)$.

On peut comparer les *sommes partielles* de deux séries à termes positifs *divergentes* :

- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S'_n$.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$ alors $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(S'_n)$.
- Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$ alors $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(S'_n)$.

→ **Convergence absolue**

Lorsque la série n'est plus à termes positifs (cas réel ou complexe), on étudie sa convergence absolue.

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : CV abs \implies CV

Une série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fautive : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

→ **Produit de Cauchy**

Théorème : Produit de Cauchy

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \quad \text{avec } w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

→ **Critère spécial des séries alternées**

Théorème : Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum (-1)^n \alpha_n$ une série à termes réels telle que :

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ positive, } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

Alors $\sum (-1)^n \alpha_n$ converge et $|R_n| = |S - S_n| \leq \alpha_{n+1}$. R_n est de plus du signe du premier terme « négligé ».

Application à l'étude de la convergence uniforme de certaines séries de fonctions.

Séries à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. La nature de la série est ainsi indépendante de la norme choisie.

→ **Convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n.**

On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème

Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

→ **Exponentielles de matrices et d'endomorphismes**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $A \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Par récurrence simple, $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Théorème / Définition : Exponentielle de matrice

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge abs.

Sa somme est appelée exponentielle de A et on pose :

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

De même, pour $f \in \mathcal{L}(E)$ (en dim. finie), $\exp(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$.

Proposition

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent,

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$$

