1 Procédés sommatoires discrets

« Er macht es wie der Fuchs, der wischt mit dem Schwänze seine Spuren im Sande aus[1]*. »*

Abel, à propos des démonstrations arides de Gauss

Plan de cours

I | Généralités sur les séries numériques

A – Définitions et premières propriétés

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On appelle somme partielle au rang n le terme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.
- On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On la note $\sum u_n$.
- Lorsque la suite (S_n) converge, on dit que la série de terme général u_n converge et on appelle *somme de la série* la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Notation : $S=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.
- Lorsqu'elle converge, on appelle reste au rang n la différence :

$$R_n=S-S_n=\sum_{k>n}u_k \quad \text{où} \quad S=\lim_{n\to+\infty}S_n$$

Lorsqu'une série ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

En cas de convergence, $R_n=S-S_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

On remarquera qu'on ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Proposition 1.2 : Opérations sur les séries

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Alors $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$$

L'ensemble des séries numériques convergentes est ainsi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

À noter : si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

En revanche, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, on ne peut rien dire de la nature de $\sum(u_n+v_n)$.

1. Il était comme un renard, qui efface avec sa queue les traces de pas sur le sable.

Proposition 1.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. Dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Une observation élémentaire nous permet d'étudier la convergence d'une suite... en se ramenant à celle d'une de série !

Proposition 1.4

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.

Démonstration

Notons S_n la somme partielle de la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

$S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. ∎

B – Divergence grossière

Théorème 1.5 : Condition nécessaire de convergence

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration

On suppose que $\sum u_n$ converge et on note S sa somme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$.

$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$. ∎

Par contraposée, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (la divergence est alors qualifiée de grossière).
Attention, la réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$. Au fond, quand on veut prouver la convergence d'une série, la question n'est pas tant de savoir si le terme tend vers 0, mais plutôt à quelle vitesse.

C – Calcul direct

On peut dans certains cas (peu fréquents) calculer la somme partielle au rang n avant de conclure en passant à la limite.

Théorème 1.6 : Série géométrique

Soit $x \in \mathbb{C}$. $\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut $\dfrac{1}{1-x}$.

Démonstration

- Pour $x \neq 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Cette quantité admet une limite finie si et seulement si $|x| < 1$.
- Pour $x = 1$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge.

On notera qu'en cas de convergence, on dispose d'une expression explicite du reste : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. ∎

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

Exemple

La série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet, $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 1

(i) Montrer que pour tous $x, y \in]0,+\infty[$, $\arctan x - \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$.

(ii) Montrer que pour tout entier n, $n^4+n^2+1 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$.

(iii) En déduire la nature de la série $\sum \arctan\left(\dfrac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$.

II | Séries à termes positifs

Une série de terme général réel u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

Lemme 1.7

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang).
Par définition, $\sum u_n$ converge ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. En effet, $S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0$.
Si elle est majorée, elle converge. Si elle ne l'est pas, elle diverge vers $+\infty$. ■

Exemple – Divergence de la série harmonique (1)

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n}$, dite *série harmonique*, diverge.

Posons pour cela $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut constater que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Si la série convergeait, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtiendrait $0 \geqslant 1/2$, absurde ! Donc la série harmonique diverge, et même vers $+\infty$ puisqu'il s'agit d'une série est à termes positifs.

A – Règle de majoration

Théorème 1.8 : Majoration

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Démonstration

Par positivité de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} v_k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$ ← majoration par une constante

La série à termes positifs $\sum u_n$ est majorée donc converge. En passant à la limite, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. ■

On adapte facilement la preuve lorsque l'inégalité n'est valable qu'à partir d'un certain rang. De plus,

Corollaire 1.9

Sous les mêmes hypothèses, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple

Montrons que la série de terme général $\frac{1}{(2n+2)3^n}$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \frac{1}{(2n+2)3^n} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$. On conclut par comparaison de séries à termes positifs.

Ne pas oublier de vérifier que $u_n \geqslant 0$!

Exercice 2

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{e^{\sin(n)}}{n}$.

Le théorème précédent est-il encore valable pour des séries à termes négatifs ?

B – Comparaison séries/intégrales

1 – Encadrement élémentaire et application aux séries de Riemann

Commençons par l'étude d'un exemple classique.

Exemple – Divergence de la série harmonique (2)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Remarquons que pour tout réel $t \in [k, k+1]$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{t} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
Donc par croissance de l'intégrale,

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{puis, en sommant, } \ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Par comparaison, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$.

Généralisons ce principe. Pour cela, nous intégrerons des fonctions sur des intervalles non bornés, du type $[a, +\infty[$.

Définition 1.10 : Intégrale impropre

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $a \in \mathbb{R}$.
Si $\displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale impropre converge et on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Sinon, on dit qu'elle diverge.

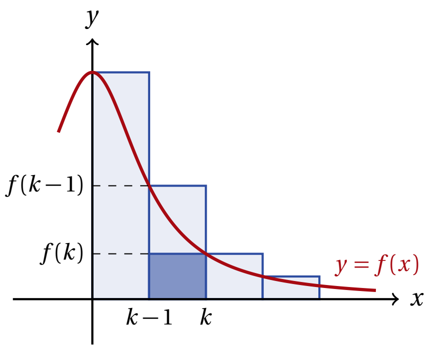
Théorème 1.11 : Comparaison séries/intégrales

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et f une application continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$.
Alors, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant a} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration

La nature d'une série ne dépendant pas de ses premiers termes, prenons pour simplifier $a = 0$.

- Comme f est supposée continue par morceaux et décroissante,



$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

Il sera parfois plus commode d'encadrer la somme :

$$\int_0^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

- Si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, par positivité de f, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
  La suite des sommes partielles de cette SATP étant majorée, la série converge.
- Si $\sum f(n)$ converge, $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie.
  La fonction *croissante* $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet alors elle aussi une limite, nécessairement finie. ■

Une application directe de ce théorème nous donne de nouvelles séries de référence.

Lemme 1.12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Remarquons que $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

- Pour $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}}-1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1} \text{ si } \alpha>1 \\ +\infty \text{ si } \alpha<1 \end{cases}$
- Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. ■

Théorème 1.13 : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration

Remarquons que pour $\alpha \leqslant 0$, la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

Supposons donc $\alpha > 0$. Comme $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, continue et positive sur $[1,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature. La série converge donc si et seulement si $\alpha > 1$. ■

Exercice 3

Déterminer, selon la valeur du paramètre réel α, la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln^\alpha(n)}$.

Exercice 4

Trouver la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ et en donner une approximation à 10^{-3} près.

2 – Application à la recherche d'équivalents de sommes partielles et de restes

La technique d'encadrement série-intégrale s'avère fort efficace pour estimer la somme partielle d'une série divergente ou le reste d'une série convergente. Elle sera régulièrement mise en pratique dans le chapitre « Suites et séries de fonctions ». Si $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et décroissante, on retrouve facilement :

$$\forall n \geqslant p,\quad \int_p^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=p}^{n} f(k) \leqslant \int_{p-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

L'encadrement reste vrai, quitte à changer le sens des inégalités, lorsque f est croissante.

Exemples

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1+\ln(n)$ donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. De même, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n}$ donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Exercice 5

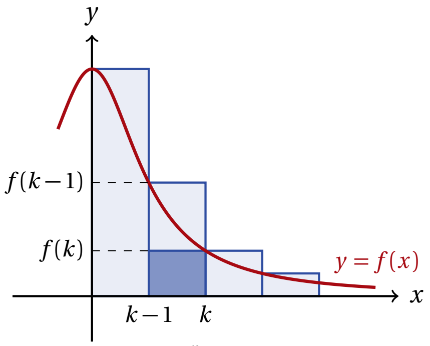
Trouver un équivalent en 1 de la fonction zêta de Riemann définie sur $]1,+\infty]$ par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

3 – Compléments sur les techniques d'encadrement (pour votre culture, HP)

Pour $f : [p,+\infty[\to \mathbb{R}$ toujours supposée continue, positive et décroissante, il est possible d'affiner l'estimation de :

$$\int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=p+1}^{n} f(k) = \sum_{k=p+1}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k) \right)$$

On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u_k = \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)$. Prouvons que $\sum u_k$ converge.



Comme f est supposée continue et décroissante,

$$f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k-1) \quad \text{donc} \quad 0 \leqslant u_k \leqslant f(k-1) - f(k)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} u_k \leqslant f(p) - f(n) \leqslant f(p)$ car f est positive.

En tant que série à termes positifs majorée, $\sum u_n$ converge vers une limite notée ℓ.

Comme $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} u_k = \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=p+1}^{n} f(k)$, on vient de prouver que $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_p^n f(t)\,\mathrm{d}t - \ell + \mathrm{o}(1)$.

Exemple – Vers un développement asymptotique de la série harmonique

Le résultat précédent justifie l'existence d'une constante réelle γ, appelée constante d'Euler, telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Si l'on perd la monotonie de f, l'estimation de $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k)$ s'avère moins immédiate mais pas impossible, quitte à supposer f de classe $\mathscr{C}^1$. En effet, une intégration par parties et l'inégalité triangulaire conduisent successivement à :

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k) = \int_{k-1}^{k} (k-1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{puis} \quad \left| \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t - f(k) \right| \leqslant \int_{k-1}^{k} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

Il nous reste à supposer que $\displaystyle\int_p^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge (autrement dit que f' est intégrable sur $[p,+\infty[$). L'encadrement précédent nous garantit alors que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant p+1} f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_p^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exercice 6

Déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

C – Règles du « petit-o », du « grand-O » et des équivalents

Théorème 1.14 : Règle du « grand-O »

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration

Supposons qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant K v_n$.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge. ■

Théorème 1.15 : Règle du « petit-o »

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge.

La positivité de u_n est en fait inutile, contrairement à celle de v_n. On peut se contenter de supposer que $\sum u_n$ est une séries à termes complexes. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ ou $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Corollaire 1.16

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

Exercice 7

Déterminer la nature des séries $\sum \mathrm{e}^{-n^2}$, $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$ et $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$.

On peut montrer que $\dfrac{1}{n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(u_n)$ avec $\alpha \leqslant 1$ pour justifier que $\sum u_n$ diverge.

Théorème 1.17 : Équivalents

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs (à partir d'un certain rang).
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration

On considère deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Comme $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge, il en va de même pour $\sum(u_n - v_n)$ et donc pour $\sum u_n$ par somme de séries convergentes. De même, si $\sum u_n$ converge, $\sum v_n$ converge. Les deux séries sont bien de même nature. ■

Exercice 8

Quelle est la nature de $\sum \dfrac{n+5}{(2^n - n)\sqrt{n^2+4}}$?

Exemple – Divergence de la série harmonique (3)

Déterminons la nature de $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et déduisons-en celle de $\sum \dfrac{1}{n}$.
Remarquons tout d'abord que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\big[\ln(k+1) - \ln(k)\big] = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

D'où la divergence de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$ et $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
Donc ces deux séries à termes positifs sont de même nature, elles divergent.

Exercice 9

Montrer à l'aide de la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ que la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

Exemple – Vers un développement asymptotique de la série harmonique (bis)

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$
Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en justifiant que la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge.
Pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Comme $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$, $u_n - u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n^2}$.
La convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ nous assure, d'après le théorème précédent, la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cette limite, notée γ, est appelée constante d'Euler. On a montré que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

D – Règle de d'Alembert

Théorème 1.18 : Règle de d'Alembert

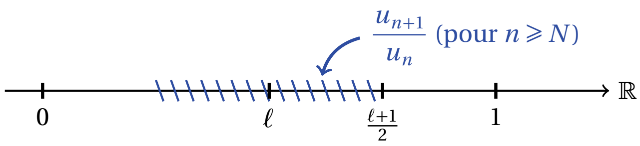
On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes *strictement positifs* à partir d'un certain rang et que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty]$$

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire. (cas douteux)

Démonstration

- Si $\ell > 1$, à partir d'un certain rang, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ donc la suite à termes positifs (u_n) est strictement croissante. Elle ne peut donc converger vers 0 et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell < 1$, on procède à une comparaison avec une série géométrique.
  À partir d'un certain rang N, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{\ell+1}{2}$ (revenir pour cela à la définition de la limite et choisir le bon ε).



  Comme $u_n > 0$, $u_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right) u_n \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^2 u_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$.
  Le dernier terme est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{\ell+1}{2} < 1$ donc par comparaison, la série converge. ■

Cette règle est très pratique lorsqu'on travaille avec des séries dont le terme général fait intervenir des puissances et des factorielles. Attention cependant aux cas douteux, la règle de d'Alembert ne résout pas tous les problèmes !

Exemples (cas douteux)

Considérer les deux séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$.

Exemple (cas intéressant)

Déterminons la nature de $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

Il s'agit d'une série à termes strictement positifs, on applique la règle de d'Alembert à $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1$$

Donc la série converge d'après la règle de d'Alembert.

III | Séries absolument convergentes

Définition 1.19 : Convergence absolue

On dit que $\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1.20

Une série absolument convergente est convergente.

Démonstration

- *Cas des séries à termes réels*

  Remarquons tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ donc : $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$.
  Par comparaison de séries à termes positifs,

  $$\sum |u_n| \text{ converge} \Longrightarrow \sum (u_n + |u_n|) \text{ converge} \Longrightarrow \sum u_n \text{ converge}$$

- *Cas des séries à termes complexes*

  On remarque tout d'abord que $0 \leqslant |\mathrm{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $0 \leqslant |\mathrm{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$.

  Par comparaison de séries à termes positifs, si $\sum |u_n|$ converge, il en va de même pour $\sum |\mathrm{Re}(u_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(u_n)|$.

  Comme ces deux dernières séries sont à termes réels, le point précédent nous garantit la convergence de $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et de $\sum \mathrm{Im}(u_n)$. Bref, $\sum u_n$ converge. ■

La réciproque est fausse. On appelle série semi-convergente une série convergente qui n'est pas absolument convergente.
Nous verrons par exemple que la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

Exercice 10

Étudier la convergence de la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exemple fondamental – la série exponentielle

On démontre aisément que la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$. Calculons maintenant sa somme.

- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$.
  On rappelle qu'alors,

  $$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^n \right| \leqslant M \cdot \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{(inégalité de Taylor-Lagrange)}$$

- Appliquons ce résultat pour $a = 0$, $b = 1$ et $f(t) = \mathrm{e}^{tz}$ où $z \in \mathbb{C}$, f étant de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$. Or $f^{(n+1)}(t) = z^{n+1}\mathrm{e}^{tz}$, donc $\left| \mathrm{e}^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \sup_{t\in[0,1]} |\mathrm{e}^{tz}| \cdot \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 1.21 : Inégalité triangulaire

Si la série de terme général u_n converge absolument, alors :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration

Supposons que la série de terme général u_n converge absolument. Remarquons tout d'abord que l'inégalité précédente a un sens : les deux séries $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$ convergent. Par inégalité triangulaire, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\left| \sum_{n=0}^{N} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n|$.

Il n'y a plus qu'à passer à la limite ! ■

IV | Étude de la semi-convergence

A – Séries alternées

Définition 1.22

On appelle série alternée une série de la forme $\sum (-1)^n a_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème 1.23 : Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série alternée où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et de limite nulle.
Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge et $|R_n|=|S-S_n|\leqslant a_{n+1}$. R_n est par ailleurs du signe du premier terme « négligé ».

Démonstration

Étudions la convergence de $\sum u_n$ avec $u_n=(-1)^n a_n$ et (a_n) positive, décroissante et de limite nulle.
On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$.

- Montrons que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
  (i) $S_{2n+2}-S_{2n}=a_{2n+2}-a_{2n+1}\leqslant 0$ par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
  (ii) $S_{2n+3}-S_{2n+1}=a_{2n+2}-a_{2n+3}\geqslant 0$ par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
  (iii) $S_{2n+1}-S_{2n}=-a_{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

  Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite S. Ainsi, $\sum u_n$ converge vers S.
- De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_{2n-1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$ et $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$ D'où, $0\leqslant S-S_{2n-1}\leqslant a_{2n}$ et $a_{2n+1}\leqslant S-S_{2n}\leqslant 0$.
  On a donc $|R_{2n-1}|\leqslant a_{2n}$. De même, on montre que $|R_{2n}|\leqslant a_{2n+1}$. ■

Exemple (série harmonique alternée)

Il s'agit de la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n}$. Cette série ne converge pas absolument mais d'après le théorème précédent, elle converge.
On va de plus montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$. En effet, pour $x\neq 1$, $\displaystyle\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k+\frac{(-x)^n}{1+x}$.
Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2=\int_0^1\sum_{k=0}^{n-1}(-x)^k\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}+\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$.
De plus, $\displaystyle\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, car $\displaystyle\left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right|\leqslant x^n$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1\frac{(-x)^n}{1+x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1\left|\frac{(-x)^n}{1+x}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ainsi, en passant à la limite, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=-\ln(2)$.
On sait même, en utilisant les notations précédentes, que $0\leqslant R_9=-\ln(2)-S_9\leqslant\frac{1}{10}$; ce qui signifie que $\displaystyle S_9=\sum_{k=1}^{9}\frac{(-1)^k}{k}$ est positive et est une approximation de $-\ln(2)$ à 0,1 près.

Exercice 11

Déterminer la nature des séries $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ en fonction du paramètre $\alpha\in\mathbb{R}$.

B – Transformation d'Abel et critère de Dirichlet (pour votre culture, HP)

La transformation d'Abel intervient couramment dans l'étude de séries potentiellement semi-convergentes. Parfois qualifiée d'*intégration par parties discrètes*, elle consiste à exprimer une somme de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k b_k$ à l'aide de la somme $\displaystyle B_k=\sum_{i=0}^{k}b_i$ (intégration discrète) et de la différence a_k-a_{k-1} (dérivation discrète).
À la clef, une méthode commode pour justifier la convergence de la série $\sum a_k b_k$ et un critère généralisant celui dit des séries alternées.

Théorème 1.24 : Critère de Dirichlet

Soient $\sum b_n$ une série à termes complexes dont les sommes partielles sont bornées et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante et de limite nulle. Alors, $\sum a_n b_n$ converge.

Démonstration

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B_k = \sum_{i=0}^{k} b_i$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

- $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle, $a_n B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $|(a_k - a_{k+1}) B_k| \leqslant M |a_k - a_{k+1}| = M(a_k - a_{k+1})$ par décroissance de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Or $\sum (a_{k+1} - a_k)$ converge puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Donc par comparaison, $\sum (a_k - a_{k+1}) B_k$ converge absolument donc converge.

  C'est le signe que $\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ admet une limite. Bref, $\sum a_n b_n$ converge. ■

Exemple

Étudions la nature de $\sum \frac{z^n}{n}$ pour $z \in \mathbb{C}$.

- La règle de d'Alembert permet de conclure pour $|z| < 1$ (convergence absolue) et $|z| > 1$ (divergence grossière).
- Supposons $|z| = 1$. Il existe alors $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\theta}$. Quelle est la nature de $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n}$?

  $\longrightarrow$ Excluons d'ores et déjà le cas $\theta \equiv 0\ [2\pi]$ pour lequel on retrouve la série harmonique.

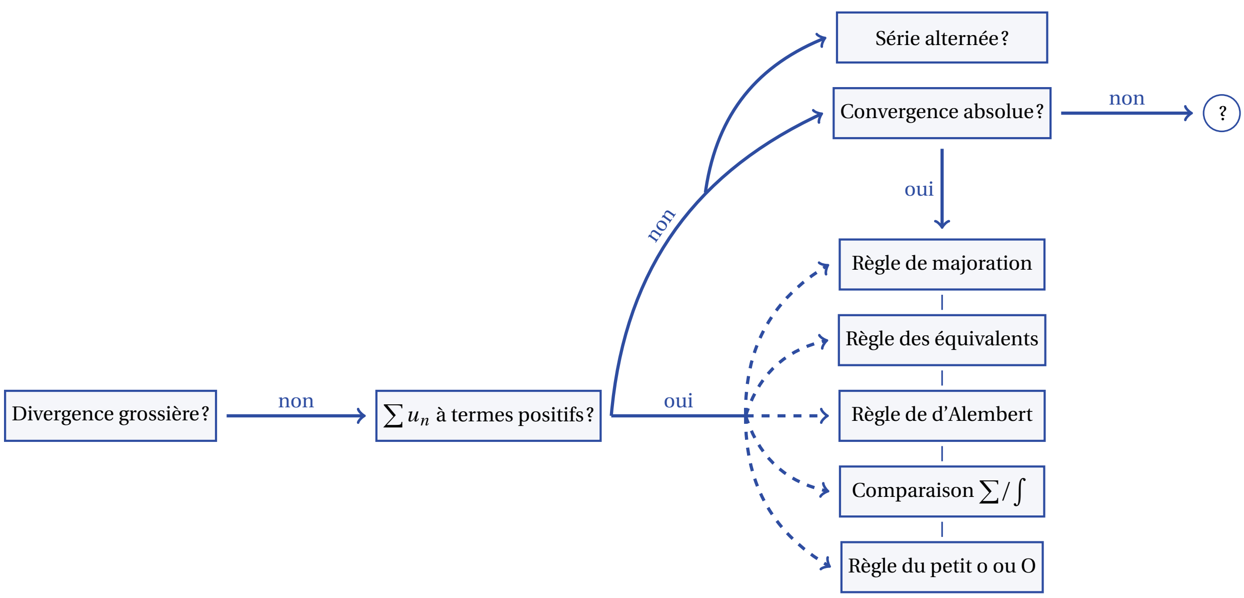
  $\longrightarrow$ Comme $1/n$ décroit et est de limite nulle, il ne reste plus qu'à majorer $\left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right|$.

  Puisque $\mathrm{e}^{i\theta} \neq 1$, par inégalité triangulaire, $\left|\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}\right| = \left|\frac{1 - \mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{i\theta}}\right| \leqslant \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i\theta}|}$ $\longleftarrow$ constante par rapport à n

Pour les 5/2, nous venons d'établir que le domaine de convergence de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ est $D(0,1) \setminus \{1\}$.

On généralise aisément à $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ et donc, par exemple, à des séries de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.
En revanche, pour pouvoir l'utiliser, il sera nécessaire de retrouver à chaque fois la transformation d'Abel qui ne figure pas explicitement au programme.

V | Étude d'une série numérique – synthèse



VI | Sommation des relations de comparaison

Théorème 1.25 : Comparaison des restes de deux séries à termes positifs convergentes

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose $\sum v_n$ à termes positifs et convergente.
On note R_n et R'_n leurs restes respectifs au rang n.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge et $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge et $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(R'_n\right)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge et $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(R'_n\right)$.

Démonstration

La convergence de $\sum u_n$ a déjà été établie.

- Cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$. Il existe $M\in\mathbb{R}$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que pour tout $n\geqslant n_0$, $|u_n|\leqslant M\,v_n$. Pour tout $p\geqslant n_0$,

$$\left|\sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{+\infty} |u_n| \leqslant M\cdot \sum_{n=p+1}^{+\infty} v_n \quad \text{c'est-à-dire} \quad R_p \underset{p\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(R'_p\right)$$

- Cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. On adapte la raisonnement précédent en remplaçant M par $\varepsilon>0$ arbitraire.
- Cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. On conclut en remarquant que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$. ■

Exemple

Recherchons un équivalent du reste de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$. Comme $\frac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}$,

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{p\to+\infty}{\sim} \sum_{n=p+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{p+1} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{p}$$

Exemple – Développement asymptotique de la série harmonique, le retour !

Posons pour $n\in\mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

- Nous avions vu que pour $n\geqslant 2$, $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$.
La convergence de la série $\sum(u_n - u_{n-1})$ impliquait celle de la suite (u_n), d'où la relation :

$$H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

- Poussons un peu le développement grâce au théorème précédent.
Les restes des séries à termes positifs convergentes $\sum(u_{n-1}-u_n)$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ sont équivalents. Ainsi,

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}(u_{p-1}-u_p) = u_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{2p^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

Ainsi, $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Théorème 1.26 : Comparaison des sommes partielles de deux séries à termes positifs divergentes

Soient deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. On suppose $\sum v_n$ à termes positifs et divergente.
On note S_n et S'_n leurs sommes partielles respectives au rang n.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S'_n$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(S'_n\right)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(S'_n\right)$.

Démonstration

Comme dans la démonstration précédente, on peut se contenter d'étudier le cas où $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$, le reste en découle. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant M\,v_n$. Pour tout $n > n_0$,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n_0} u_k + M \sum_{k=n_0+1}^{n} v_k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M\,v_k)}_{\text{cste } / \ n} + M \underbrace{\sum_{k=0}^{n} v_k}_{=S'_n}$$

Par hypothèse $S'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $\dfrac{1}{S'_n} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M\,v_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, à partir d'un certain rang n_1,

$$\frac{1}{S'_n} \cdot \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M\,v_k) \leqslant M \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{k=0}^{n_0}(u_k - M\,v_k) \leqslant M\,S'_n$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, il vient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant 2M \sum_{k=0}^{n} v_k$. Le résultat est démontré. ■

Corollaire 1.27 : Lemme de Cesàro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergeant vers $\ell \in \mathbb{C}$. Alors, $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$. Comme $\sum 1$ diverge, d'après le théorème précédent,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \ell + \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = (n+1)\ell + \mathrm{o}(n) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$$

■

VII | Familles sommables de nombres complexes

Nous avons jusqu'à présent été amenés à ne sommer que des termes réels ou complexes préalablement ordonnés. En effet, l'étude d'une série, définie comme suite de sommes partielles, impose un certain ordre de sommation :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

Que se passe-t-il si l'on permute deux termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? À vrai dire, pas grand chose ! On ne change ni la nature de la série, ni sa somme en cas de convergence. De même avec trois, quatre, cinq, ... termes. Si cette permutation concernait toutefois une infinité de termes, on ne pourrait pas en dire autant comme le montre l'exemple suivant.

Exemple

- Nous avons précédemment établi que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots = \ln(2)$.
- En « réarrangeant » les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}\ln(2) &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots\right) = \frac{\ln(2)}{2}\end{aligned}$$

Il s'agit donc de prendre les plus grandes précautions lorsque l'on cherche à modifier l'ordre de sommation. Fort heureusement, le théorème énoncé ci-dessous va mettre « bon ordre » à cela.

Théorème 1.28 : Convergence commutative

Si $\sum u_n$ converge absolument, alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

La convergence absolue nous garantit donc que la somme obtenue ne dépend pas de l'ordre de sommation.

Les prochaines parties visent dans cette optique à développer une théorie de la sommation robuste, nous permettant de sommer avec souplesse des familles de nombres complexes indépendamment de l'ordre choisi. Elle offrira au passage la possibilité de travailler avec des familles indexées par des ensembles autres que $\mathbb{N}$, du moment qu'ils restent raisonnables, en fait des ensembles dont on peut numéroter les éléments ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou encore $\mathbb{N}^2$...). Notre capacité à manipuler des sommes, en particulier des sommes doubles, en sortira renforcée. Cela justifiera tous les efforts consentis !

A – Détour par les ensembles dénombrables

Définition 1.29

Un ensemble E est un dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier naturel n non nul et une bijection de E dans $[\![1,n]\!]$.
L'entier n est alors appelé cardinal de E et noté $\mathrm{card}(E)$. Par convention, $\mathrm{card}(\varnothing)=0$.

Le cardinal d'un ensemble fini correspond intuitivement à son nombre d'éléments.

Il peut exister plusieurs bijections entre E et $[\![1,n]\!]$ (il y en a exactement $n!$) mais un tel entier n est unique. Donner une telle bijection revient à énumérer les éléments de E. Si E contient n éléments, on pourra alors poser $E=\{x_1,\dots,x_n\}$.

Deux ensembles finis E et F ont même cardinal si et seulement s'il existe une bijection entre E et F.

Qu'en est-il dans le cas d'ensembles infinis ? Comment comparer leur nombre d'éléments ? Il suffit pour cela de savoir s'ils possèdent le « même nombre d'éléments », c'est-à-dire si l'on peut établir une bijection entre les deux.

Définition 1.30 : Ensemble dénombrable

Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si E est un ensemble dénombrable, il existe alors une application $\varphi:\mathbb{N}\to E$ bijective qui nous permet d'écrire :

$$E=\{\varphi(n)\mid n\in\mathbb{N}\}=\{x_n\mid n\in\mathbb{N}\}\text{ en posant }x_n=\varphi(n)$$

L'ensemble $\mathbb{N}$ est bien entendu dénombrable puisqu'en bijection avec lui-même. Donnons maintenant quelques exemples plus surprenants d'ensembles dénombrables. Nous établirons pour cela des bijections entre ces ensembles et $\mathbb{N}$ mais notons qu'il est suffisant d'établir une surjection de $\mathbb{N}$ sur un ensemble pour que ce dernier soit au plus dénombrable.

Proposition 1.31

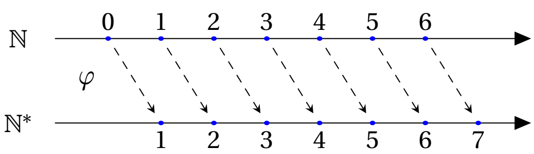
L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

Démonstration

On considère l'application bijective :

$$\varphi:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^*\\ n & \longmapsto & n+1\end{array}\right.$$

■



Bien que $\mathbb{N}^*$ soit strictement plus *petit* que $\mathbb{N}$ au sens de l'inclusion, les deux ensembles ont cependant la même « taille », ils sont dits équipotents. On montre plus généralement que toutes les parties de $\mathbb{N}$ sont au plus dénombrables.

Proposition 1.32

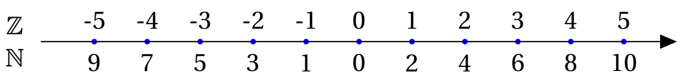
L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration

Numérotons les entiers relatifs en considérant la suite naturelle d'entiers : $0,-1,1,-2,2,-3,3,\dots$

On pose pour cela $\varphi(k)=2k$ si k est positif ou nul, $\varphi(k)=-(2k+1)$ si k est négatif.

Il ne reste plus qu'à prouver que φ réalise une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$. ■



Proposition 1.33

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.

Démonstration

D'après le théorème de factorisation des nombres premiers, tout entier n s'écrit de manière unique sous la forme $2^i p_1 \dots p_r$ où $p_1, \dots, p_r$ sont des facteurs premiers impairs. Ainsi, il existe un unique couple (i, j) tel que $n = 2^i \cdot (2j+1)$. Il ne reste plus qu'à poser $f(i, j) = 2^i \cdot (2j+1)$. L'application f ainsi définie est, par construction, bijective. ∎

Donnons une nouvelle preuve constructiviste de ce résultat.

Démonstration (bis)

Nous cherchons à associer à chaque couple d'entiers de la forme (i, j) un et un seul entier noté $f(i, j)$. Une idée consiste à numéroter les couples d'entiers le long des diagonales d'équations $i + j = k$ pour k parcourant $\mathbb{N}$. Cherchons maintenant à expliciter la bijection recherchée.

- La $k^{\text{ième}}$ diagonale comporte $k+1$ éléments, il s'agit des couples $(k, 0), (k-1, 1), \dots, (0, k)$.
- Le premier élément de cette diagonale porte le numéro $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.
- Le $(j+1)^{\text{ième}}$ porte donc le numéro $\dfrac{k(k+1)}{2} + j$.
- Autrement dit, on associe au couple (i, j) l'entier naturel $\varphi(i, j) = \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$.

Il reste alors à vérifier que l'application φ réalise bien une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$. ∎

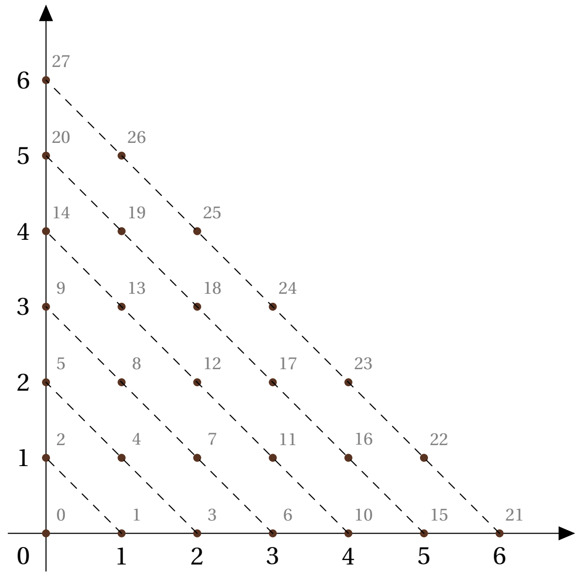


Illustration d'un exemple de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$

Il en découle le résultat plus général suivant.

Corollaire 1.34 : Produit fini d'ensembles dénombrables

Le produit cartésien d'un nombre *fini* d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration

Soient E et F deux ensembles dénombrables. Notons φ_1 une bijection de E dans $\mathbb{N}$ et φ_2 une bijection de F dans $\mathbb{N}$. Considérons maintenant l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) \end{array} \right.$$

Cette application réalise une bijection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}^2$. Comme $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, il en va de même pour $E \times F$. Ce résultat se généralise alors par récurrence à tout produit fini d'ensembles dénombrables. ∎

Le résultat est faux pour un produit cartésien infini.

Définition 1.35 : Réunion et intersection dénombrables

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties d'un ensemble E. On définit les ensembles $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ par :

$$\left(x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad x \in A_n \right) \quad \text{et} \quad \left(x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in A_n \right)$$

Proposition 1.36 : Union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Démonstration

Soit $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille d'ensembles dénombrables. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons φ_k une bijection de $\mathbb{N}$ sur E_k. On considère alors l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k \\ (n,k) & \longmapsto & \varphi_k(n) \end{array} \right.$$

L'application φ réalise clairement une surjection de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sur $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k$. ■

Corollaire 1.37

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Il suffit d'écrire $\mathbb{Q} = \displaystyle\bigcup_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \left\{\frac{p}{q}\right\}$.

Exercice 12

Montrer que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable puis que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Proposition 1.38

Les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Démonstration

Nous démontrerons seulement le résultat pour $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, mais la démonstration se généralise aisément à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et à $\mathbb{R}$ en utilisant un argument analogue, dit de la *diagonale de Cantor*.
Montrons pour cela que toute partie dénombrable de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne peut contenir tous les éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.
Soit $\mathscr{P}$ une partie dénombrable de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On peut poser $\mathscr{P} = \left\{(u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}} \mid k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Écrivons les termes successifs de chacune des suites :

$u^{(1)}$	$\boxed{0}$	1	0	1	1	$\cdots$
$u^{(2)}$	1	$\boxed{1}$	0	0	0	$\cdots$
$u^{(3)}$	0	0	$\boxed{1}$	1	0	$\cdots$
$u^{(4)}$	1	0	1	$\boxed{0}$	0	$\cdots$
$\vdots$						

Considérons la suite v de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ définie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par $v_k = 1 - u_k^{(k)}$. Une telle suite ne peut appartenir à $\mathscr{P}$ puisqu'elle diffère de chaque élément de $\mathscr{P}$. ■

Ne cherchons donc pas à numéroter les nombres réels, ce n'est pas possible !

B – Cas des familles de réels positifs

Dans tout ce paragraphe, on se donne un ensemble dénombrable I et une famille de *réels positifs* $(u_i)_{i\in I}$.
Ces hypothèses appellent deux remarques :

- La dénombrabilité imposée à I paraît à première vue restrictive : pourquoi s'interdire *a priori* de sommer sur $\mathbb{R}$? Nous montrerons plus tard que la dénombrabilité est, dans les faits, incontournable.
- Comme pour les séries numériques et vectorielles, l'étude de la sommabilité d'une famille de réels positifs constitue un cas de base auquel on essaiera de se ramener de façon systématique.

Notre définition de la somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ doit respecter deux contraintes : elle ne peut privilégier un ordre de sommation particulier et doit fournir des résultats cohérents avec la sommation « naturelle » lorsque $I = \mathbb{N}$.

Pour cela, on considère indistinctement toutes les sommes d'un nombre *fini* de termes dont les indices sont pris dans I, à travers l'ensemble :

$$\left\{ \sum_{i\in J} u_i \mid J \subset I \text{ et } J \text{ finie} \right\}$$

Cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{R}_+$ dans lequel les sommes finies jouent toutes un rôle analogue. Cet ensemble admet une borne supérieure dans $[0,+\infty]$, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition 1.39 : Somme d'une famille de réels positifs, sommabilité

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

- On appelle somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$ l'élément $\sup\limits_{\substack{J\subset I\\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i$. Cet élément de $[0,+\infty]$ est noté $\sum_{i\in I} u_i$.
- La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si et seulement si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Si I est fini, on retrouve la somme définie au sens usuel. Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, on retombe également sur nos pieds !

Proposition 1.40 : Lien avec les séries numériques

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

Dans ce cas, somme de la famille et somme de la série coïncident : $\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration

- Supposons la famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sommable. Montrons que la série à termes positifs $\sum u_n$ converge en montrant que ses sommes partielles sont majorées.

  Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i\in[\![0,n]\!]} u_i \leqslant \sup\limits_{\substack{J\subset\mathbb{N}\\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i$. Par passage à la limite, on a même $\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i$.
- Réciproquement, supposons que la série de terme général u_n converge. Pour toute partie J finie de $\mathbb{N}$, on peut écrire $J \subset [\![0,n]\!]$ avec $n = \max(J)$. Comme la série est à termes positifs, $\sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{n} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

  L'ensemble des sommes $\sum_{i\in J} u_i$ est donc majorée et $\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sup\limits_{\substack{J\subset\mathbb{N}\\ J \text{finie}}} \sum_{i\in J} u_i \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. ■

Le résultat suivant joue un rôle central tant du point de vue théorique que pratique.

Théorème 1.41 : Sommation par paquets (cas positif)

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble dénombrable I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right)$$

Cette égalité, valable dans $[0,+\infty]$, est redoutable : **à condition de travailler avec des réels positifs, tous les calculs peuvent être menés en pratique sans aucune justification préalable de sommabilité** et on peut regrouper les termes comme on l'entend. Obtenir à la fin des calculs une somme finie justifiera *a posteriori* la sommabilité de la famille.

Avant d'étendre la notion de sommabilité à une famille quelconque de nombres complexes et de préciser les propriétés générales relatives aux familles sommables, revenons quelques instants sur l'hypothèse de dénombrabilité faite sur I.

Proposition 1.42

Soient I un ensemble quelconque et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, c'est-à-dire si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, alors $\{i\in I \mid u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration

Par positivité de $(u_i)_{i\in I}$, $\{i\in I \mid u_i\neq 0\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n$ où $I_n=\left\{i\in I \mid u_i\geqslant \frac{1}{n}\right\}$. Montrons que pour $n\in\mathbb{N}^*$ fixé, I_n est fini.

La famille étant sommable, il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que pour toute partie finie J de I, $\sum_{i\in J} u_i\leqslant M$.

Considérons une partie finie J de I_n. $M\geqslant \sum_{i\in J} u_i\geqslant \sum_{i\in J}\frac{1}{n}=\frac{\mathrm{card}(J)}{n}$. Ainsi, $\mathrm{card}(J)\leqslant nM$. Par l'absurde, I_n est fini. ■

On peut donc sommer sur $\mathbb{R}$ à la seule condition que l'ensemble des indices i pour lesquels $u_i\neq 0$ est au plus dénombrable. Bref, cela revient à sommer sur un ensemble dénombrable...

C – Cas des familles de nombres réels ou complexes

I désigne toujours un ensemble dénombrable mais on considère cette fois-ci une famille quelconque de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$. La notion de borne supérieure perdant tout son sens dans $\mathbb{C}$, il nous reste à retrouver le cadre confortable offert par $\overline{\mathbb{R}_+}$ en se ramenant au cas des familles de réels positifs.

Définition 1.43

Soient I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Lorsque $I=\mathbb{N}$, on retrouve l'équivalence entre sommabilité et convergence absolue de la série.

Par ailleurs, sous réserve de sommabilité, on peut définir la somme d'une famille de nombres réels ou complexes.

- si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de réels, en notant $u_i^+=\max(0,u_i)$ et $u_i^-=\max(0,-u_i)$, la famille est sommable si, et seulement si, $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont. On pose alors :

$$\sum_{i\in I} u_i=\sum_{i\in I} u_i^+-\sum_{i\in I} u_i^-$$

- si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes, la famille est sommable si, et seulement si, $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ le sont. On pose alors :

$$\sum_{i\in I} u_i=\sum_{i\in I}\mathrm{Re}(u_i)+i\sum_{i\in I}\mathrm{Im}(u_i)$$

Proposition 1.44 : Linéarité de la somme

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Alors, la famille $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$ est sommable, et :

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i)=\lambda\sum_{i\in I} u_i+\mu\sum_{i\in I} v_i$$

Démonstration

- Justifions dans un premier temps la sommabilité de $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$. Les familles $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ étant supposées sommables, pour toute partie finie J incluse dans I, $\sum_{i\in J}|u_i|\leqslant\sum_{i\in I}|u_i|$ et $\sum_{i\in J}|v_i|\leqslant\sum_{i\in I}|v_i|$.

  Ainsi, par inégalité triangulaire (sur une somme finie), pour toute partie J finie de I,

$$\sum_{i\in J}|\lambda u_i+\mu v_i|\leqslant|\lambda|\sum_{i\in J}|u_i|+|\mu|\sum_{i\in J}|v_i|\leqslant|\lambda|\sum_{i\in I}|u_i|+|\mu|\sum_{i\in I}|v_i| \quad \longleftarrow \text{majoration par une constante}$$

  D'où la sommabilité.

- Montrons l'additivité dans le cas positif. Soient donc $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs sommables.

  ① Pour toute partie J finie de I, $\sum_{i\in J}(u_i+v_i)\underset{\substack{\text{somme}\\\text{finie}}}{=}\sum_{i\in J}u_i+\sum_{i\in J}v_i\leqslant\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i$.

  Par passage à la borne sup, $\sum_{i\in I}(u_i+v_i)\leqslant\sum_{i\in I}u_i+\sum_{i\in I}v_i$.

  ② Montrons maintenant l'inégalité inverse, moins triviale. Soit $\varepsilon>0$. Par définition de la borne supérieure, il existe deux parties finies J_1 et J_2 de I telles que :

$$\sum_{i\in I}u_i-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i\in J_1}u_i\leqslant\sum_{i\in I}u_i \quad\text{et}\quad \sum_{i\in I}v_i-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\sum_{i\in J_2}v_i\leqslant\sum_{i\in I}v_i$$

En posant $J = J_1 \cup J_2$, il en découle naturellement que :

$$\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in J_1} u_i + \sum_{i\in J_2} v_i \leqslant \sum_{i\in J} u_i + \sum_{i\in J} v_i \underset{\substack{\text{somme}\\ \text{finie}}}{=} \sum_{i\in J}(u_i+v_i) \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i)$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i - \varepsilon \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i)$. On a donc bien $\sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i \leqslant \sum_{i\in I}(u_i+v_i)$.

L'égalité est démontrée (dans le cas positif). ■

L'ensemble, noté $\ell^1(I)$, des familles sommables indexées par un ensemble dénombrable I possède donc une structure d'espace vectoriel[2]. L'application $(u_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} u_i$ définit une forme linéaire sur cet espace.

Proposition 1.45 : Inégalité triangulaire

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors, $\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$.

On justifie ce résultat en se ramenant là encore aux sommes sur les parties finies de I avant de passer à la borne supérieure.

Théorème 1.46 : Sommation par paquets (cas complexe)

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors,

(i) pour tout entier n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable (ii) la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right)$ converge

De plus, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Contrairement au cas positif, l'égalité finale exige de vérifier au préalable la sommabilité de la famille ! En pratique,

- on justifiera la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$ en appliquant à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ le très souple théorème de sommation par paquets dans le cas positif.
- les conclusions intermédiaires (i) et (ii) ne servent qu'à donner un sens à l'égalité $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$. Inutile de les mentionner sur une copie : si $\sum_{i\in I}|u_i| < +\infty$, on écrira directement $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

Ce résultat sera essentiellement exploité dans le cas des séries doubles et des produit de Cauchy, avec $I = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; c'est l'objet de la partie suivante.

Corollaire 1.47 : Convergence commutative

Si la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes indexée par $\mathbb{N}$ est sommable, c'est-à-dire si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration

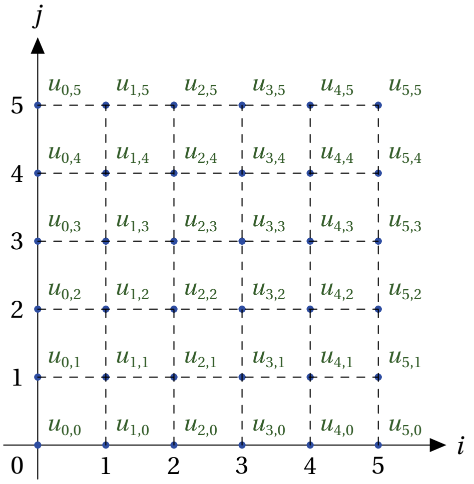
On applique le théorème précédent à $I_n = \{\sigma(n)\}$ et $\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\sigma(n)\}$. ■

En cas de convergence absolue d'une série, on ne modifie pas la valeur de la somme en permutant l'ensemble des indices. Ce résultat est faux en cas de semi-convergence, comme nous avons pu le constater avec la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

2. Il s'agit même d'un espace vectoriel normé, pour peu qu'on le munisse de la norme $\|u\|_1 = \sum_{i\in I}|u_i|$.

D – Application aux séries doubles et produit de Cauchy

1 – Séries doubles



Sommation par tranches

On considère une suite double complexe $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ et on s'interroge sur l'égalité [3] :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}} = \boxed{\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}}$$

sommation verticale sommation horizontale

On va plus généralement chercher dans ce paragraphe à sommer des familles indexées par $I \times J$, où I et J sont des ensembles quelconques, au moyen du théorème de sommation par paquets.

Théorème 1.48 : Tonelli discret

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$.

Ce sont à nouveau des égalités dans $[0,+\infty]$. L'interversion des sommes dans le cas positif est toujours licite.

Démonstration

Le théorème de sommation par paquets s'applique aux partitions $I\times J = \displaystyle\bigcup_{i\in I} I_i = \bigcup_{j\in J} J_j$ où $I_i = \{i\}\times J$ et $J_j = I\times\{j\}$. ■

Exercice 13

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la famille $\left(\mathrm{e}^{-ap-bq}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 14

On considère la fonction ζ de Riemann définie par $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^s}$ avec $s\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que $\zeta(s)$ est définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(\zeta(n)-1)$ converge et justifier l'égalité $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1) = 1$.

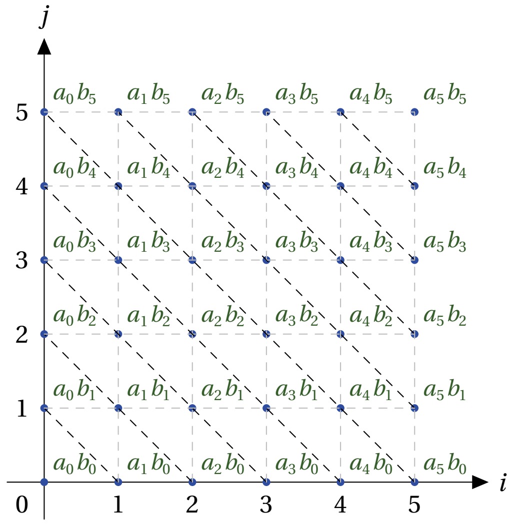
Théorème 1.49 : Fubini discret

Si la famille de complexes $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, alors, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$.

En pratique, on commence par vérifier que $\displaystyle\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|u_{i,j}| < +\infty$ ou bien $\displaystyle\sum_{j\in J}\sum_{i\in I}|u_{i,j}| < +\infty$. Ensuite, tout est permis !

3. si tant est qu'elle puisse avoir un sens.

2 – Produit de Cauchy



On cherche ici à sommer la famille de complexes $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ supposée sommable.

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) && \text{(sommation verticale)}\\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right) && \text{(sommation horizontale)}\\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} b_j\end{aligned}$$

Mais la figure ci-contre nous suggère de sommer différemment…

Le long d'une diagonale, la somme des indices est constante, ce qui nous invite à poser $I_n = \{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid i+j=n\}$. Comme $\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, on peut appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille sommable $(a_i b_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$:

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \times \sum_{j=0}^{+\infty} b_j = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} a_i b_j = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$$

Définition 1.50 : Produit de Cauchy

Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série de terme général c_n défini par $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Théorème 1.51 : Produit de Cauchy

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

La convergence absolue s'avère indispensable : on ne peut en général pas se passer de la sommabilité.

Exemple

Considérons maintenant de nouveau une série géométrique de raison $q \in]-1;1[$, donc une série absolument convergente. D'après ce qui précède,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)q^n$$

Ce résultat vous étonne-t-il ?

Exemple – Exponentielle, le retour

Vérifions que pour tous nombres complexes z et z', $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^{z'}$.

Pour cela, rappelons que pour tout $z\in\mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.

On peut donc effectuer un produit de Cauchy pour $z, z'\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\exp(z)\cdot\exp(z') &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\cdot\frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z^k z'^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k z'^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z+z')^n}{n!} = \exp(z+z')\end{aligned}$$

L'exponentielle est ainsi un morphisme de $(\mathbb{C},+)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.