Procédés sommatoires discrets

Feuille d'exercices #01

Partie A – Séries numériques

Exercice 1 — Étudier la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{n!}{n^n} \qquad b_n = \frac{e^n}{n!} \qquad c_n = e^{-\sqrt{\ln(n)}}$$

$$d_n = \frac{1}{n}(2-\sqrt[n]{3})^n \qquad e_n = \arccos\left(\frac{n}{n+1}\right) \qquad f_n = \frac{1}{n\ln(n)}$$

$$g_n = \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right) \qquad h_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) \qquad j_n = \sin\left(\frac{n^2}{n+1}\cdot\pi\right)$$

$$k_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n)+(-1)^n} \qquad p_n = (-1)^n\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2} \qquad q_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

Exercice 2 — Étudier, éventuellement en fonction de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la nature de la série dont le terme général est le suivant :

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \qquad b_n = \frac{n^{2\alpha}}{\alpha^n+\ln(n)} \qquad c_n = \frac{\ln\left(1+n^\beta\right)}{n^\alpha}$$

$$d_n = e^{-(\ln n)^\alpha} \qquad e_n = \frac{\pi}{2}-\arctan(n^\alpha) \qquad f_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln n)^n}$$

$$g_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n} \qquad h_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2(t)}{t^2}\,dt \qquad j_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$

Exercice 3 — Pour $a, b, c \in \mathbb{R}$, déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \cos\left(\frac{a}{n}\right)+\sin\left(\frac{b}{n}\right)+\operatorname{sh}\left(\frac{c}{n}\right)-e^a\cdot\left(1+\frac{b+c}{n}\right)^n$$

Exercice 4 — *Séries de Bertrand*

Étudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 — Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum\left[\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}\right]$$

Calculer sa somme en cas de convergence.

Exercice 6 — Établir la convergence et calculer la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+2)}\ ;\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n-1)}\ ;\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor-\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

Exercice 7 — En utilisant l'égalité $\frac{1}{p+1} = \int_0^1 t^p\,dt$, calculer les sommes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\ ;\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\ ;\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right)$$

Exercice 8 —

1. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $1+j^n+j^{2n}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n)!}$ dont on justifiera au préalable l'existence.

Exercice 9 — *Règle de Raabe-Duhamel*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1+\frac{\alpha}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \text{où } \alpha\in\mathbb{R}$$

1. À quelle condition sur $\beta\in\mathbb{R}$ la suite $\left(\ln\left(n^\beta u_n\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?
2. En déduire la nature de $\sum u_n$ suivant la valeur de α.

Exercice 10 — On suppose que la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et que la série de terme général u_n converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On pourra s'intéresser à $S_{2n}-S_n$ *après avoir posé* $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 11 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.

Montrer que $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.

Exercice 12 — Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}-\ln(n)$$

Exercice 13 — On pose pour tous entiers naturels n, p, $I_n(p)=\displaystyle\int_0^1 (1-x^p)^n\,\mathrm{d}x$.

1. On suppose qu'une suite (u_n) vérifie $u_{n+1}-u_n \underset{n\to+\infty}{=} -\dfrac{1}{np}+O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Montrer que la suite $(u_n+\ln(n)/p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
2. Établir une relation de récurrence sur $(I_n(p))_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
3. Montrer l'existence d'un réel b tel que $I_n(p) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{b}{n^{1/p}}$.
4. Déterminer le réel b.

Exercice 14 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}$.

1. Déterminer les limites de u_n et nu_n.
2. Préciser la nature de la série $\sum(-1)^n u_n$.

Exercice 15 — Soient $\alpha>0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1>0 \quad \text{et pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{n+1}=u_n+\frac{1}{n^\alpha u_n}$$

1. Pour $\alpha>1$, montrer que (u_n) converge vers une limite ℓ et donner un équivalent de $u_n-\ell$.
2. Pour $\alpha\in]0,1]$, montrer que la suite (u_n) diverge et donner un équivalent de u_n à l'aide de la suite $u_{n+1}^2-u_n^2$.

Exercice 16 — *Transformations d'Abel*

Soit $\sum u_n$ une série convergente.

1. Justifier la convergence de $\sum \dfrac{u_n}{n}$.
2. On suppose dans cette question que $\sum |u_{n+1}-u_n|$ converge.
   Établir la convergence de la série $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 17 — Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente.

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Montrer que $\sum R_n$ converge si et seulement si $\sum na_n$ converge puis justifier qu'en cas de convergence, les sommes sont égales.

Exercice 18 — Donner un équivalent en $+\infty$ de u_n et v_n avec :

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\quad(\alpha\in\mathbb{R})\qquad\text{et}\qquad v_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\quad(\alpha>1)$$

Exercice 19 — On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+\sqrt{k}}$.

1. Donner un équivalent simple de S_n.
2. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n)+\alpha+\mathrm{o}(1)$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.

Exercice 20 —

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   Montrer que $\sum u_n$ converge et que le reste au rang n est équivalent à u_{n+1}.
2. En déduire un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k^2}$.

Exercice 21 —

1. Donner un équivalent simple de $\dfrac{\ln(2n)}{2n}-\dfrac{\ln(2n+1)}{2n+1}$.

2. Encadrer $\displaystyle\sum_{k=n}^{n+p}\frac{\ln(k)}{k^2}$ à l'aide d'intégrales pour tous $n,p\in\mathbb{N}^*$.

3. Prouver la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ et donner un équivalent du reste.

Exercice 22 — On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{\ln(n+1)-\ln(n)}{n}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge. On pose alors pour $n\in\mathbb{N}$, $R_n=\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.
2. Trouver un équivalent de R_n en $+\infty$.
3. À l'aide d'un équivalent de $u_k-\dfrac{1}{k(k+1)}$, trouver un développement asymptotique de R_n de la forme :
$$R_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{n}+\frac{\alpha}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
4. En déduire un équivalent $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{\ln(k)}{k(k+1)}$.

Exercice 23 — Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. On note R_n son reste au rang n. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R_n^2$.
Déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice 24 — Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs divergente. On note alors S_n sa somme partielle au rang n.
Prouver que pour tout $\alpha>1$, $\sum\dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge à l'aide d'une comparaison série/intégrale.

Partie B – Familles sommables

Exercice 25 — Pour quelles valeurs de $z\in\mathbb{C}$ les familles sont-elles sommables ?
$$\left(\frac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\qquad\left(\frac{z^{pq}}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\qquad\left(\frac{(p+q)!}{p!q!}z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$$

Exercice 26 — Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{(-1)^p}{q^p}\right)_{p,q\geqslant 2}$.

Exercice 27 — Pour $p,q\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_{p,q}=\begin{cases}\dfrac{1}{p^2(q-p)!} & \text{si } p\leqslant q\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$

1. Montrer la sommabilité de $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$.
2. Calculer sa somme. *On admet pour cela que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 28 — Soit $q\in\mathbb{C}$ avec $|q|<1$.

1. Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.
2. Soit $r\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}r^{|n|}\mathrm{e}^{in\theta}$.

Exercice 29 — Soient $\alpha\in\mathbb{R}$ et $(a,b)\in\mathbb{C}^2$. Étudier la sommabilité des familles :
$$\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\qquad\left(\frac{a^pb^q}{(p+q)!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}\qquad\left(\frac{1}{p^\alpha+q^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$$

Exercice 30 — On note $p(n)$ le nombre de chiffres de l'entier n écrit en base 10.

1. Établir l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$ pour tout $x\in]-1,1[$.
2. Justifier la sommabilité et calculer la somme de $\left(\dfrac{p(n)}{n(n+1)}\right)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 31 — Préciser la nature des séries :
$$\sum(-1)^n(\zeta(n)-1)\qquad\sum\frac{\zeta(n)-1}{n}\qquad\sum\frac{(-1)^n}{n}\zeta(n)$$

On montrera que pour tout $x\in]-1,1[$, $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

On rappelle que $\gamma=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)$.

Exercice 32 — Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \frac{1}{1-a-b+ab}$.

Exercice 33 — Établir que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n$$

où l'on a noté $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 34 — Justifier la convergence et calculer, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$$

Exercice 35 — Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs sommable. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{k(k+1)}$$

Montrer que (u_n) est définie, établir la convergence de $\sum u_n$ et calculer sa somme.