

## Résumé 12 – Séries numériques et vectorielles

### Sommes classiques

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Si } q \neq 1, \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ et } \sum_{k=p}^n q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ et } x^n - y^n = (x-y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

### Convergence des séries numériques

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est supposée à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .  
On appelle :

- somme partielle au rang  $n$  le terme  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .
- série de terme général  $u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , notée  $\sum u_n$ .
- somme de la série de terme général la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$

La série de terme général  $u_n$  est dite convergente lorsque  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. On appelle alors :

- somme de la série la limite de  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Notation :  $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

- reste au rang  $n$  la différence  $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Petit passage en revue des techniques au programme permettant de déterminer la nature d'une série.

#### → Divergence grossière

##### Théorème

Si  $\sum u_n$  converge alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, la série diverge (de manière grossière).

La réciproque est fautive comme le montre l'exemple  $\sum \frac{1}{n}$ .

#### → Calcul direct

##### Théorème : Série géométrique

$\sum x^n$  converge si et seulement si  $|x| < 1$  (pour  $x \in \mathbb{C}$ ).  
Dans ce cas, sa somme vaut  $\frac{1}{1-x}$ .

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

##### Proposition

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ssi la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

Application au développement asymptotique de la série harmonique.

#### → Cas des séries à termes positifs

Attention, ces résultats ne sont valables que pour des séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang).

##### Théorème

On suppose que  $\sum u_n$  est une série à termes positifs. Si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée alors la série converge. Sinon, elle diverge vers  $+\infty$ .

##### Théorème : Règle de majoration

On suppose que pour tout  $n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$ .

(i)  $\sum v_n$  converge  $\implies \sum u_n$  converge.

Et alors,  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ .

(ii)  $\sum u_n$  diverge  $\implies \sum v_n$  diverge.

##### Théorème : Règle des équivalents

On suppose  $\sum v_n$  à termes positifs et  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ .  
Alors,  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

##### Théorème : Règle de d'Alembert

Soit  $\sum u_n$  une série à termes strictement positifs vérifiant de plus  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ .

- Si  $\ell < 1$ , la série converge.
- Si  $\ell > 1$ , la série diverge.
- Si  $\ell = 1$ , on ne peut rien dire.

##### Théorème : Comparaison séries/intégrales

Si  $f : [a, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, positive et décroissante,  $\sum f(n)$  et  $\int_a^{+\infty} f(t) dt$  sont de même nature.

Ce théorème fournit de nouvelles séries de référence.

##### Théorème : Séries de Riemann

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

##### Théorème : Règles du petit o et du grand O

Soit  $\sum v_n$  une série à termes positifs convergente.

- Si  $u_n = O(v_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge (absolument).
- Si  $u_n = o(v_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge (absolument)

On peut comparer les restes de deux séries à termes positifs convergentes :

- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  alors  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} R'_n$ .
- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  alors  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(R'_n)$ .
- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  alors  $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(R'_n)$ .

On peut comparer les *sommes partielles* de deux séries à termes positifs *divergentes* :

- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  alors  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S'_n$ .
- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$  alors  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(S'_n)$ .
- Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$  alors  $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(S'_n)$ .

→ **Convergence absolue**

Lorsque la série n'est plus à termes positifs (cas réel ou complexe), on étudie sa convergence absolue.

**Définition**

On dit que  $\sum u_n$  converge absolument lorsque la série à termes positifs  $\sum |u_n|$  converge.

**Théorème : CV abs  $\implies$  CV**

Une série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fautive :  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  est semi-convergente.

→ **Produit de Cauchy**

**Théorème : Produit de Cauchy**

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) \quad \text{avec } w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

→ **Critère spécial des séries alternées**

**Théorème : Théorème spécial des séries alternées**

Soit  $\sum (-1)^n \alpha_n$  une série à termes réels telle que :

$$(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ positive, } (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \searrow \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0.$$

Alors  $\sum (-1)^n \alpha_n$  converge et  $|R_n| = |S - S_n| \leq \alpha_{n+1}$ .  $R_n$  est de plus du signe du premier terme « négligé ».

Application à l'étude de la convergence uniforme de certaines séries de fonctions.

**Séries à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé de dimension finie. La nature de la série est ainsi indépendante de la norme choisie.

→ **Convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n.**

On dit que  $\sum u_n$  converge absolument lorsque  $\sum \|u_n\|$  converge.

**Théorème**

Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

→ **Exponentielles de matrices et d'endomorphismes**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'application  $A \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$  définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Elle vérifie :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Par récurrence simple,  $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leq \|A\|^k$ .

**Théorème / Définition : Exponentielle de matrice**

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$  converge abs.

Sa somme est appelée exponentielle de  $A$  et on pose :

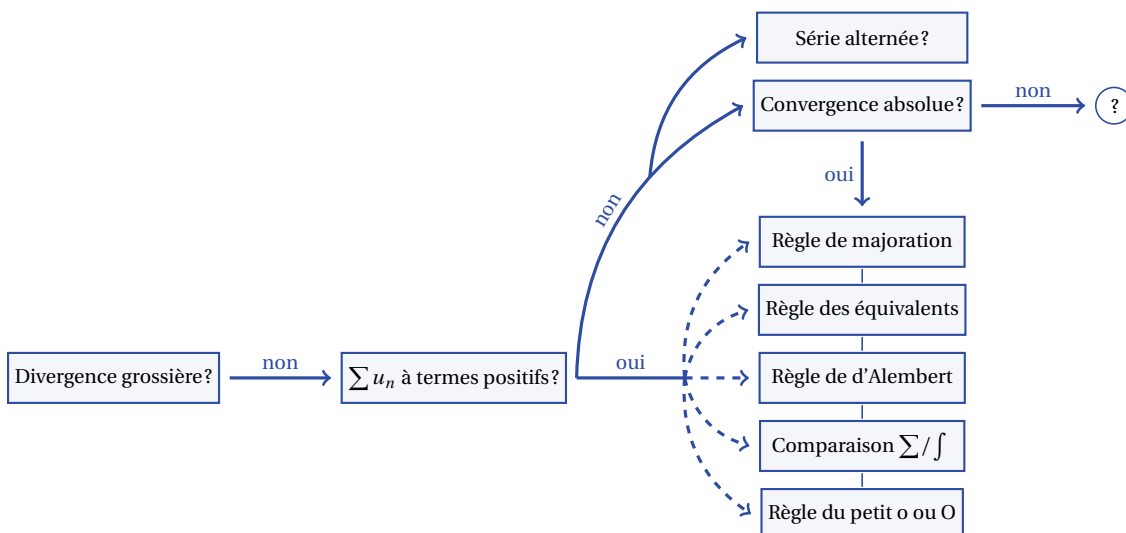
$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

De même, pour  $f \in \mathcal{L}(E)$  (en dim. finie),  $\exp(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$ .

**Proposition**

Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  commutent,

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A)$$



## Résumé 13 – Familles sommables

### Ensembles dénombrables

**Définition : Ensemble dénombrable**

- Un ensemble  $E$  est dit dénombrable s'il existe une bijection entre  $E$  et  $\mathbb{N}$ .
- Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec  $\mathbb{N}$ .

Si  $E$  est dénombrable, on peut numéroter ses éléments :

$$E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Les ensembles  $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$  sont dénombrables.

- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- La réunion finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Les ensembles  $\mathbb{R}, \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  ne sont pas dénombrables.

### Familles sommables de nombres complexes

$(u_i)_{i \in I}$  désigne une famille de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable  $I$ .

→ **Cas des familles de réels positifs**

**Définition**

La famille de réels positifs  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable si

$$\left\{ \sum_{i \in J} u_i \mid J \subset I, J \text{ finie} \right\} \text{ est majoré.}$$

Dans ce cas, on pose :  $\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} u_i$

Si  $(u_i)_{i \in I}$  n'est pas sommable, on pose  $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$ .

**Proposition : Lien avec les séries numériques**

La famille de réels positifs  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est sommable si, et seulement si, la série  $\sum u_n$  converge.

Dans ce cas,  $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$ .

**Théorème : Sommation par paquets (cas positif)**

Soient  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une partition d'un ensemble dénombrable  $I$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de réels positifs. Alors,

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Cette dernière égalité est une égalité dans  $[0, +\infty]$ . Si la somme est finie, la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable.

→ **Cas des familles de nombres réels ou complexes**

**Définition**

La famille  $(u_i)_{i \in I}$  de nombres complexes est dite sommable si la famille de réels positifs  $(|u_i|)_{i \in I}$  l'est.

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est une famille de complexes, la famille est sommable si, et seulement si,  $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$  le sont. On pose alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(u_i)$$

Toute combinaison linéaire de familles sommables est sommable et pour une famille sommable  $(u_i)_{i \in I}$  :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$$

**Théorème : Sommation par paquets (cas complexe)**

Soient  $(I_n)$  une partition de  $I$  et  $(u_i)_{i \in I}$  une famille de nombres complexes supposée sommable. Alors,

- (i) pour tout entier  $n$ ,  $(u_i)_{i \in I_n}$  est sommable;
- (ii) la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$  converge.

De plus,  $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$ .

En pratique, on commence par appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille  $(|u_i|)_{i \in I}$  pour justifier la sommabilité.

**Corollaire : Convergence commutative**

Si la série  $\sum u_n$  converge absolument, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}$ ,  $(u_{\sigma(i)})_{i \in \mathbb{N}}$  est sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

### Application aux séries doubles

**Théorème : Tonelli discret**

Soit  $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  une famille de réels positifs.

Alors,  $\sum_{(i,j) \in I \times J} u_{i,j} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} u_{i,j} = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} u_{i,j}$ .

C'est à nouveau une égalité dans  $[0, +\infty]$ .

**Théorème : Fubini discret**

Si la famille de complexes  $(u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$$

On retrouve également le théorème du produit de Cauchy.