Résumé 1 – Suites numériques et vectorielles

Suites numériques classiques

- Suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{K}$:

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

- Suite géométrique de raison $q \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = q\,u_n \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = q^n u_0$.

- Suite arithmético-géométrique

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{K} \\ u_{n+1} = a\,u_n + b \quad (a \neq 1) \end{cases}$$

On note ℓ le point fixe de la suite : $\ell = a\ell + b$. $(u_n - \ell)$ est géométrique de raison a et $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$.

- Suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \end{cases}$$

On résout l'équation caractéristique $X^2 - aX - b = 0$ de discriminant associé Δ.

(i) Si $\Delta > 0$, deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

(ii) Si $\Delta = 0$, une racine réelle double r.

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + n\mu) r^n$$

(iii) Si $\Delta < 0$, deux racines complexes $\rho \mathrm{e}^{\pm i\theta}$.

$$\exists(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$$

Convergence des suites numériques

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne ici une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{K}$ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

La limite, lorsqu'elle existe, est unique. Toute suite convergente est bornée, mais la réciproque est fausse.

→ Cas des suites réelles

Axiome de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Théorème : Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure.

Une suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Outre les théorèmes de comparaison et des gendarmes, le théorème suivant est à connaître.

Théorème : Suites adjacentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles vérifiant :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

(ii) $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

→ Suites extraites et valeurs d'adhérence

Toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante est appelée suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ puisque $\varphi(n) \geqslant n$.

Théorème

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors toute suite extraite converge vers ℓ.

Théorème : Bolzano-Weierstrass

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Relations de comparaison

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques réelles avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, on dit que :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
  Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
  Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n}$ est borné.
  Notation : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite ℓ.

De plus, si deux suites sont équivalentes, les termes généraux sont de même signe à partir d'un certain rang.

Théorème

Pour deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$$

Suites vectorielles

On note $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque.

→ Convergence d'une suite

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que :

- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leqslant M$.
- la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \quad \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

  On dit qu'elle diverge sinon.

On remarquera que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, la suite numérique $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition

(i) La limite d'une suite, lorsqu'elle existe est unique.

(ii) Toute suite convergente est bornée.

L'ensemble des suites convergentes est un espace vectoriel et l'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur cet espace.

Proposition

Soient p espaces vectoriels normés (E_i, N_i). On pose $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ et on munit E de la norme produit notée N. Une suite $u = (u_1, \ldots, u_p)$ de E converge si, et seulement si, chaque suite u_i converge dans E_i. Dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_{1,n}, \ldots, \lim_{n\to+\infty} u_{p,n}\right)$$

Une suite définie sur un espace vectoriel normé produit converge si et seulement si chacune des suites composantes converge. Ainsi,

- pour étudier une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^p$, on se ramènera à l'étude des p suites composantes (elles, à valeurs dans $\mathbb{K}$).
- pour déterminer la nature d'une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$, on pourra étudier la convergence des parties réelle et imaginaire.

→ Suites extraites et valeurs d'adhérence

Définition : Suite extraite

On appelle suite extraite ou sous-suite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Définition : Valeur d'adhérence

On appelle valeur d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E toute limite d'une e sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition

Une suite converge vers $\ell \in E$ si, et seulement si, toutes ses sous-suites convergent vers ℓ.

La limite est donc l'unique valeur d'adhérence d'une suite convergente. Ainsi, une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Si K est une partie compacte de E, toute suite admet au moins, par définition, une valeur d'adhérence dans K.

Résumé 2 – Séries numériques et vectorielles

Sommes classiques

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Si } q \neq 1,\ \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{et} \quad \sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \cdot \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \text{ et } x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

Convergence des séries numériques

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est supposée à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On appelle :

- somme partielle au rang n le terme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\sum u_n$.
- somme de la série de terme général la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

La série de terme général u_n est dite convergente lorsque $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On appelle alors :

- somme de la série la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Notation : $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- reste au rang n la différence $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

On ne modifie pas la nature d'une série en modifiant ses premiers termes.

Petit passage en revue des techniques au programme permettant de déterminer la nature d'une série.

→ Divergence grossière

Théorème

Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la série diverge (de manière grossière).

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple $\sum \frac{1}{n}$.

→ Calcul direct

Théorème : Série géométrique

$\sum x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$ (pour $x \in \mathbb{C}$).
Dans ce cas, sa somme vaut $\dfrac{1}{1-x}$.

On peut également prouver la convergence de séries à l'aide de sommes télescopiques.

Proposition

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Application au développement asymptotique de la série harmonique.

→ Cas des séries à termes positifs

Attention, ces résultats ne sont valables que pour des séries à termes positifs (au moins à partir d'un certain rang).

Théorème

On suppose que $\sum u_n$ est une série à termes positifs.
Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors la série converge.
Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Théorème : Règle de majoration

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

(i) $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow \sum u_n$ converge.

Et alors, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

(ii) $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow \sum v_n$ diverge.

Théorème : Règle des équivalents

On suppose $\sum v_n$ à termes positifs et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
Alors, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Théorème : Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série à termes *strictement* positifs vérifiant de plus $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Théorème : Comparaison séries/intégrales

Si $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue, positive et décroissante, $\sum f(n)$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Ce théorème fournit de nouvelles séries de référence.

Théorème : Séries de Riemann

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème : Règles du petit o et du grand O

Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs convergente.

- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge (absolument).
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge (absolument)

On peut comparer les *restes* de deux séries à termes positifs *convergentes* :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} R'_n$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(R'_n\right)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $R_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(R'_n\right)$.

On peut comparer les *sommes partielles* de deux séries à termes positifs *divergentes* :

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} S'_n$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(S'_n\right)$.
- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}(v_n)$ alors $S_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(S'_n\right)$.

→ Convergence absolue

Lorsque la série n'est plus à termes positifs (cas réel ou complexe), on étudie sa convergence absolue.

Définition

On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Théorème : CV abs $\Longrightarrow$ CV

Une série absolument convergente est convergente.

La réciproque est fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

→ Produit de Cauchy

Théorème : Produit de Cauchy

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors leur produit de Cauchy converge (absolument) et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \qquad \text{avec } w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

→ Critère spécial des séries alternées

Théorème : Théorème spécial des séries alternées

Soit $\sum(-1)^n \alpha_n$ une série à termes réels telle que :

$$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ positive, } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

Alors $\sum(-1)^n \alpha_n$ converge et $|R_n| = |S - S_n| \leqslant \alpha_{n+1}$.
R_n est de plus du signe du premier terme « négligé ».

Application à l'étude de la convergence uniforme de certaines séries de fonctions.

Séries à valeurs dans un e.v.n. de dim. finie

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. La nature de la série est ainsi indépendante de la norme choisie.

→ Convergence d'une série à valeurs dans un e.v.n.

On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque $\sum \|u_n\|$ converge.

Théorème

Une série absolument convergente d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

→ Exponentielles de matrices et d'endomorphismes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $A \mapsto \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Elle vérifie :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|$$

Par récurrence simple, $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \|A^k\| \leqslant \|A\|^k$.

Théorème / Définition : Exponentielle de matrice

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{A^k}{k!}$ converge abs.

Sa somme est appelée exponentielle de A et on pose :

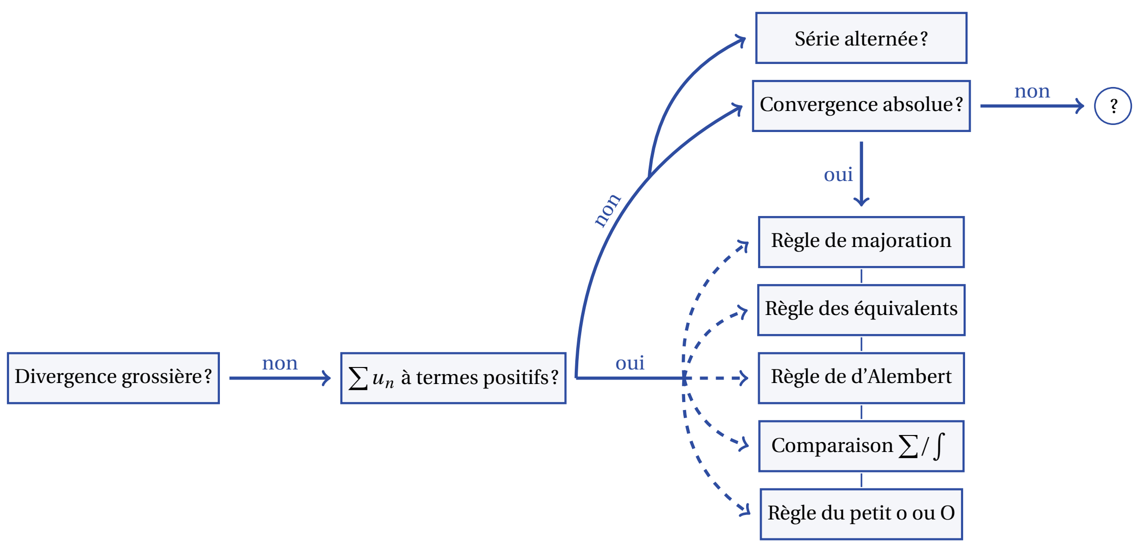
$$\exp(A) = \mathrm{e}^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

De même, pour $f \in \mathscr{L}(E)$ (en dim. finie), $\exp(f) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{f^k}{k!}$.

Proposition

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutent,

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$$



Résumé 3 – Familles sommables

Ensembles dénombrables

Définition : Ensemble dénombrable

- Un ensemble E est dit dénombrable s'il existe une bijection entre E et $\mathbb{N}$.
- Il sera dit *au plus* dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si E est dénombrable, on peut numéroter ses éléments :

$$E = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

- Le produit cartésien d'un nombre *fini* d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- La réunion *finie* ou *dénombrable* d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Les ensembles $\mathbb{R}$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Familles sommables de nombres complexes

$(u_i)_{i\in I}$ désigne une famille de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable I.

→ Cas des familles de réels positifs

Définition

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si

$$\left\{\sum_{i\in J} u_i \mid J \subset I, J \text{ finie}\right\} \text{ est majoré.}$$

Dans ce cas, on pose : $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{ finie}}} \sum_{i\in J} u_i$

Si $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pose $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Proposition : Lien avec les séries numériques

La famille de réels positifs $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Théorème : Sommation par paquets (cas positif)

Soient $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition d'un ensemble dénombrable I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

Cette dernière égalité est une égalité dans $[0,+\infty]$. Si la somme est finie, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

→ Cas des familles de nombres réels ou complexes

Définition

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est dite sommable si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de complexes, la famille est sommable si, et seulement si, $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ le sont. On pose alors :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(u_i) + i \sum_{i\in I} \mathrm{Im}(u_i)$$

Toute combinaison linéaire de familles sommables est sommable et pour une famille sommable $(u_i)_{i\in I}$:

$$\left|\sum_{i\in I} u_i\right| \leqslant \sum_{i\in I} |u_i|$$

Théorème : Sommation par paquets (cas complexe)

Soient (I_n) une partition de I et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes supposée sommable. Alors,

(i) pour tout entier n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable ;

(ii) la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n}|u_i|\right)$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$.

En pratique, on commence par appliquer le théorème de sommation par paquets à la famille $(|u_i|)_{i\in I}$ pour justifier la sommabilité.

Corollaire : Convergence commutative

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Application aux séries doubles

Théorème : Tonelli discret

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs.
Alors, $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}$.

C'est à nouveau une égalité dans $[0,+\infty]$.

Théorème : Fubini discret

Si la famille de complexes $(u_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p} = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}$.

On retrouve également le théorème du produit de Cauchy.