Variables aléatoires réelles

Travaux dirigés #18

Partie A – Du côté de la sup

Exercice 1 — La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	-4	-2	1	2	3
$\mathbf{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$

1. Calculer $\mathbf{P}(X < 0)$, $\mathbf{P}(X > -1)$, $\mathbf{P}(-3.5 < X \leqslant -2)$ et $\mathbf{P}(-3.5 < X < -2)$.
2. Donner, sous forme d'un tableau, la loi de probabilité des variables aléatoires suivantes : $|X|$, $X^2 + X - 2$, $\inf(X, 1)$, $\sup(X, -X^2)$.

Exercice 2 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ et dont la loi est de la forme :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \mathbf{P}(X = k) = \lambda k$$

Déterminer λ puis calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 3 — On utilise un dé cubique parfait. Combien faut-il effectuer de lancers pour affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition de l'as au cours des différents lancers différera de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

Exercice 4 — Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, on considère une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $1/(X + 1)$.

Exercice 5 — Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On effectue deux tirages successifs d'une boule avec remise et on note X le plus grand et Y le plus petit des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X. Faire de même pour Y.
2. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z et son espérance.

Exercice 6 — Dans chacune des expériences qui suivent, reconnaître la loi de X.

1. On range au hasard 20 objets dans 3 tiroirs. X : nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. Un enclos contient 15 lamas, 15 dromadaires et 15 chameaux. On sort un animal au hasard de cet enclos. X : nombre de bosses.
3. On tire avec remise et successivement les cartes d'un jeu en contenant 32. X : rang d'apparition de la première dame.
4. On prend un jeu de 32 cartes mélangées. On retourne une par une les cartes jusqu'à l'apparition de l'as de coeur. X : nombre de cartes que l'on a retournées.
5. On suppose que les probabilités de naissance d'une fille et d'un garçon sont identiques. X est le nombre de garçons dans une famille de 3 enfants.
6. On suppose que 1% des trèfles possèdent 4 feuilles. On cueille 100 trèfles. X : nombre de trèfles à 4 feuilles cueillis.

Exercice 7 — On cherche à dépister une maladie grâce à des analyses de sang. On considère une population de n individus. On veut comparer deux méthodes.

- La première consiste à analyser individuellement tous les prélèvements.
- La seconde consiste à mélanger les n prélèvements et d'effectuer une analyse du mélange (on admettra que le résultat sera positif dès que l'une des n personnes est atteinte). Si le résultat est positif, alors on effectue une analyse individuelle de chacun des n prélèvements.

On note p la probabilité, pour un individu, d'être malade. On note X_n le nombre d'analyses nécessaires par la deuxième méthode.

1. Trouver la loi de X_n, puis calculer $\mathbf{E}(X_n)$.
2. Déterminer l'économie moyenne réalisée par personne. Pour quelle(s) valeur(s) de n est-elle maximale ?

Exercice 8 — N urnes comportent chacune des jetons numérotés de 1 à n. On tire au hasard un numéro dans chaque urne, on appelle X le plus grand des numéros.

1. Trouver la loi de X.
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Quelle est la limite de $\mathbf{E}(X)$ lorsque N tend vers $+\infty$? Commenter.

Partie B – Variables aléatoires discrètes

Exercice 9 — Trouver λ pour que les suites suivantes définissent la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad p_n = \frac{\lambda}{n^2-1}\ ; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \frac{\lambda n}{2^n}$$

Exercice 10 — Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. On suppose que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = k) = ak^2 \frac{\lambda^k}{k!} \quad (\lambda, a) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

1. Sous réserve d'existence, quelle est la fonction génératrice associée à X ?
2. En déduire la valeur de a puis l'espérance de X.

Exercice 11 — Un insecte pond des œufs, dont le nombre suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'insectes nés. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 12 — *Marche aléatoire, les prémices*
Une particule se déplace par sauts successifs et indépendants sur un axe orienté. On suppose qu'au départ cette particule se situe en O et que la probabilité pour que son abscisse augmente de 1 est égale à p (avec $0 < p < 1$) et donc, la probabilité que son abscisse diminue de 1 est $q = 1 - p$. On note X_n l'abscisse de la particule après n sauts successifs et D_n le nombre de sauts vers la droite après n sauts.

1. Donner la loi de D_n, son espérance puis sa variance.
2. Exprimer X_n en fonction de D_n.
   En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

Exercice 13 — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la fonction génératrice est :

$$\forall s \in \left]-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right[\quad g_X(s) = \frac{s}{2-s^2}$$

1. Déterminer la loi de X.
2. Reconnaître la loi de $Y = \frac{1}{2}(X+1)$ et en déduire $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 14 — Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On effectue des tirages successifs, en remettant à chaque fois la boule tirée.

1. On note X_1 le rang d'apparition de la première boule blanche.
   Reconnaître la loi de X_1 et donner sans calcul les valeurs de $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{V}(X_1)$.
2. On note X_2 le rang d'apparition de la deuxième boule blanche.
   Déterminer la loi de X_2 et calculer son espérance.
3. Comparer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{E}(X_2)$.

Exercice 15 — Soient X et Y deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de X sachant que $(X+Y=n)$.

Exercice 16 — *Fonctions de répartition de lois classiques*

1. Soient $p \in]0,1[$ et une variable aléatoire X telle que $X \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$.
   a) Déterminer la fonction de répartition de X, c'est-à-dire $x \mapsto \mathbf{P}(X \leqslant x)$.
   b) Retrouver le fait que la loi géométrique est une loi sans mémoire.
2. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et une variable aléatoire Y telle que $Y \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$. Vérifier que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(Y \leqslant n) = \frac{1}{n!}\int_\lambda^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} x^n \,\mathrm{d}x$$

Exercice 17 — Tim dispose de n pièces équilibrées. Il procède à X lancers : au k^{e} lancer, il lance k pièces. Il s'arrête dès qu'il obtient au moins un pile ou bien après les n lancers.

Donner la loi de X puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{E}(X) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}$.

Exercice 18 — Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement, avec remise. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre de tirages pour obtenir, pour la première fois, deux numéros distincts.

1. a) On désigne par A_i l'événement « le n°i apparaît au 1er tirage ».
   Calculer $\mathbf{P}(X = k | A_i)$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.
   b) À l'aide de la formule des probabilités totales, déterminer la loi de X.
2. a) Quelle est la loi de $Y = X - 1$?
   b) Donner les valeurs de $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 19 — Les variables aléatoires X et Y sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et sont indépendantes. X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ et Y une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$. On pose $Z = XY$ et on note g_X, g_Y et g_Z les fonctions génératrices de ces variables aléatoires.

1. Donner la fonction génératrice de Y.
2. Démontrer que $g_Z = g_Y \circ g_X$.
3. En déduire $\mathbf{E}(Z)$ et $\mathbf{V}(Z)$.

Partie C – Vecteurs aléatoires

Exercice 20 — On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) vérifiant $X(\Omega) = [\![1,3]\!]$, $Y(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{i+2j}{60}$ pour $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

1. Construire le tableau de probabilités de ce couple.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
4. Déterminer les lois de X sachant $(Y = 0)$ et de Y sachant $(X = 1)$.
5. Soit $U = XY$ et $V = \inf(X, Y)$. Déterminer la loi conjointe de U et V.
6. Déterminer les lois de U et V. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 21 — Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geqslant 2$). On en extrait successivement et sans remise deux jetons.
Soit X le numéro du premier jeton obtenu et Y celui du second.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. Déterminer les lois marginales.
3. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = j)$.

Exercice 22 — On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Donner la loi du couple (X, Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X = Y)$.
3. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 23 — Soient X et Y deux variables entières positives ou nulles vérifiant, pour tout couple d'entiers naturels (i, j) :

$$\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} \text{ si } 0 \leqslant j \leqslant i \text{ ; } 0 \text{ sinon}$$

où α et λ sont des constantes fixées vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $\lambda > 0$.

1. Déterminer les lois de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On pose $Z = X - Y$. Déterminer la loi de Z.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}(Y = j | Z = n)$.
4. Que peut-on en déduire pour les variables Y et Z ?

Exercice 24 — Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n. Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p. On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée. Si $X = k$, on tire k fois une boule dans U_2 avec remise et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer la loi de Y sachant $X = k$.
3. Déterminer la loi du couple (X, Y).

Exercice 25 — Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.

1. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $(S = k)$, où $k \in S(\Omega)$.
3. Pour $n \in S(\Omega)$, calculer $\mathbf{P}(S \geqslant n)$.
4. Déterminer $\mathbf{P}(S \leqslant Z)$, $\mathbf{P}(S \geqslant Z)$ et $\mathbf{P}(S = Z)$.

Exercice 26 — Une urne contient a boules blanches et b boules noires ($a + b \geqslant 3$). On tire successivement trois boules sans remise. Soient X, Y, et Z les variables aléatoires réelles respectivement égales à 1 si la première, la deuxième et la troisième boule tirée est blanche, et à 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (Y, Z).
2. En déduire les lois de Y et de Z puis calculer $\operatorname{cov}(Y, Z)$.

Exercice 27 — Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et Y la variable aléatoire définie par $Y=\max(X_1,\dots,X_n)$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Montrer que $\mathbf{E}(Y)=n-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Partie D – Inégalités probabilistes

Exercice 28 — Soit X une variable aléatoire réelle et $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ supposée strictement croissante. Montrer que :

$$\forall a>0,\quad \mathbf{P}(|X|\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbf{E}\big(f(|X|)\big)}{f(a)}$$

Exercice 29 — On suppose que $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$, où $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$. Montrer que :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 30 — *Inégalité de Chernov et marche aléatoire symétrique*
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires réelles indépendantes, telles que :

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad \mathbf{P}(X_k=1)=\mathbf{P}(X_k=-1)=\frac{1}{2}$$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $S_n=X_1+\dots+X_n$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tX_k})$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et $t\in\mathbb{R}_+$.
2. Établir que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $\mathrm{ch}(t)\leqslant\exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

   En déduire que $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{tS_n})\leqslant\exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$ puis que $\mathbf{E}(\mathrm{e}^{t|S_n|})\leqslant 2\exp\left(\dfrac{nt^2}{2}\right)$.
3. Soit $\varepsilon>0$. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}_+$,
$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(\frac{nt^2}{2}-nt\varepsilon\right)\quad\text{puis}\quad\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n}\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\exp\left(\frac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$$
4. Montrer enfin que $\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant 2\exp\left(\dfrac{-\varepsilon^2 n}{2}\right)$.

   Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 31 — *Inégalité de Jensen*
Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, de dérivée croissante et X une variable aléatoire à valeurs réelles. On suppose que X et $f(X)$ admettent une espérance.

1. Montrer que pour tout réel x, $f(x)\geqslant f'(\mathbf{E}(X))(x-\mathbf{E}(X))+f(\mathbf{E}(X))$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(f(X))\geqslant f(\mathbf{E}(X))$.

Exercice 32 — *Théorème d'approximation de Weierstrass*
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On note $X_1,X_2,\dots,X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre $x\in[0,1]$. On note également :

$$S_n=X_1+X_2+\dots+X_n\ ;\quad Z_n=\frac{S_n}{n}\quad\text{et}\quad B_n(f)(x)=\mathbf{E}(f(Z_n))$$

1. Rappeler sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.
2. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que :
$$\forall\alpha>0,\quad \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\alpha}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\mathbf{P}(|S_n-nx|\geqslant n\alpha)\leqslant\frac{1}{4n\alpha^2}$$
3. Justifier alors que :
$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)$$
4. En déduire que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. *On pourra utiliser le théorème de Heine.*

CCINP Exercices : 95, 96, 97, 98, 99, 100, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 110 et 111.