Résumé 17 – Variables aléatoires discrètes

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé.

Variables aléatoires discrètes

Définition : Variable aléatoire discrète

On appelle variable aléatoire réelle discrète toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que :

- $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable ;
- Si $x \in X(\Omega)$ alors $(X = x) \in \mathscr{A}$.

X désigne désormais une variable aléatoire discrète.

$$X(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

La famille $((X = x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.

Définition : Loi d'une variable aléatoire

On appelle loi de probabilité de X l'application :

$$P_X : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathbf{P}(X = x) \end{array} \right.$$

Se donner une une famille dénombrable de réels positifs de somme égale à 1 revient à se donner une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

Moments d'une variable aléatoire

Définition : Espérance

X est dite d'espérance finie si $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument.
Dans ce cas, on appelle espérance de X le réel :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \cdot \mathbf{P}(X = x_n)$$

Plus généralement, si X^r admet une espérance finie, on appelle moment d'ordre $r \in \mathbb{N}$ le réel $\mathbf{E}(X^r)$.

Théorème : Théorème de transfert

Soit $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$. $f(X)$ est d'espérance finie ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) \cdot \mathbf{P}(X = x_n)$ converge absolument et, alors,

$$\mathbf{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n) \cdot \mathbf{P}(X = x_n)$$

L'espérance est linéaire, positive et croissante.

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie,

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$$

Définition : Variance

Si X admet un moment d'ordre 2, $(X - \mathbf{E}(X))^2$ est d'espérance finie. On appelle variance de X et on note $\mathbf{V}(X)$ le réel positif :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))^2\big) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x)$$

On appelle écart type de X le réel $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$.

Proposition : Formule de Kœnig-Huygens

Si X admet un moment d'ordre 2,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$$

Vecteurs aléatoires discrets

On étend la définition de variable aléatoire à valeurs réelles aux variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

(X, Y) désigne un couple de variables aléatoires discrètes.

Définition : Lois conjointe et marginales

- La loi conjointe de X et de Y est l'application

$$P_{(X,Y)} : \left| \begin{array}{ccc} X(\Omega) \times Y(\Omega) & \longrightarrow & [0,1] \\ (x, y) & \longmapsto & \mathbf{P}\big(X = x, Y = y\big) \end{array} \right.$$

- Les lois marginales de (X, Y) sont celles de X et Y.

La formule des probabilités totales permet de trouver les lois marginales à partir de la loi conjointe.

Définition : Lois conditionnelles

- On appelle loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$ l'application $x \mapsto \mathbf{P}(X = x | Y = y)$;
- On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ l'application : $y \mapsto \mathbf{P}(Y = y | X = x)$.

Généralisation du théorème de transfert :

Si $Z = f(X, Y)$ est d'espérance finie,

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} f(x, y)\mathbf{P}\big(X = x, Y = y\big)$$

Définition : Indépendance

Les variables X et Y sont dites indépendantes si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}\big(X = x, Y = y\big) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}\big(Y = y\big)$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Plus généralement (lemme des coalitions) : si les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Définition

Si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors la variable aléatoire $(X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))$ admet une espérance. On appelle alors covariance de X et Y et on note $\mathrm{cov}(X,Y)$ le réel :

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y)))$$

On suppose que X et Y admettent un moment d'ordre 2.

Théorème : Formule de Kœnig-Huygens

$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathbf{E}(XY)-\mathbf{E}(X)\cdot\mathbf{E}(Y)$.

$$\mathrm{cov}(X,X)=\mathbf{V}(X) \text{ et } \mathbf{E}(XY)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ y\in Y(\Omega)}} xy\,\mathbf{P}\big(X=x,Y=y\big)$$

Proposition

Pour tous $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\mathbf{V}(aX+bY)=a^2\mathbf{V}(X)+b^2\mathbf{V}(Y)+2ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

Pour $a=b=1$, $\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)+2\mathrm{cov}(X,Y)$.

Cas particulier : $\mathbf{V}(aX+b)=a^2\mathbf{V}(X)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathrm{cov}(X,Y)|\leqslant\sigma(X)\cdot\sigma(Y)$

Théorème

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$\mathbf{E}(XY)=\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)\,;\quad \mathrm{cov}(X,Y)=0\,;$$

$$\mathbf{V}(X+Y)=\mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y)$$

La réciproque est fausse.

Fonctions génératrices

Définition : Fonction génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, la fonction génératrice de la variable X est définie par :

$$G_X : t\mapsto\mathbf{E}\big(t^X\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n)t^n$$

La série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}(X=n)t^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

Théorème : Fonction génératrice et moments

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

(i) La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbf{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1. Si tel est le cas, $\mathbf{E}(X)=G_X'(1)$.

(ii) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Théorème : Somme de variables indépendantes

Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes, alors, pour tout $t\in]-R,R[$ où $R\geqslant\min(R_X,R_Y)$,

$$G_{X+Y}(t)=\mathbf{E}\big(t^{X+Y}\big)=\mathbf{E}\big(t^X\big)\mathbf{E}\big(t^Y\big)=G_X(t)G_Y(t)$$

Inégalités de concentration et convergence

Lemme : Inégalité de Markov

Si X est à valeurs positives et admet une espérance,

$$\forall a>0\quad \mathbf{P}(X\geqslant a)\leqslant\frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Proposition : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X admet un moment d'ordre 2,

$$\forall\varepsilon>0\quad \mathbf{P}(|X-\mathbf{E}(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Théorème : Loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\geqslant1}$ une suite de variables indépendantes et de même loi, admettant un moment d'ordre 2.

En notant m l'espérance commune et $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$,

$$\forall\varepsilon\geqslant0,\quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Lois usuelles

Nom	Notation	$X(\Omega)$	$\mathbf{P}(X=k)$	$\mathbf{E}(X)$	$\mathbf{V}(X)$
Bernoulli	$\mathscr{B}(p)$	$\{0;1\}$	$\begin{cases}p \text{ si } k=1\\ q \text{ si } k=0\end{cases}$	p	pq
Binomiale	$\mathscr{B}(n,p)$	$[\![0;n]\!]$	$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$	np	npq
Uniforme	$\mathscr{U}([\![1;n]\!])$	$[\![1;n]\!]$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Géométr.	$\mathscr{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$q^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poisson	$\mathscr{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

- Si $X_1,\dots,X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(m_i,p)$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1+\dots+X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(m_1+\dots+m_n,p)$.
- Si $X_1,\dots,X_n\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda_i)$ sont mutuellement indépendantes, alors $X_1+\dots+X_n\hookrightarrow\mathscr{P}(\lambda_1+\dots+\lambda_n)$.
- Si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $X_n\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p_n)$ et $\lim_{n\to+\infty}np_n=\lambda$,

$$\forall k\in\mathbb{N},\quad \mathbf{P}(X_n=k)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

- Si $X(\Omega)=\mathbb{N}^*$, alors $X\hookrightarrow\mathscr{G}(p)$ si et seulement si :

$$\forall(k,n)\in\mathbb{N}^2,\quad \mathbf{P}(X>n+k|X>n)=\mathbf{P}(X>k)$$