Devoir maison n°1

– À RENDRE LE 01/09 –

Problème 1

Partie I – Solutions d'une équation différentielle

Dans toute la suite, le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $\left(1+x^2\right)y' + 2xy = \dfrac{1}{x}$.

1. Résoudre $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel λ, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln(x) + \lambda}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_\lambda$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

2. a) Montrer que pour tout réel λ, la fonction f_λ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Montrer que $f'_\lambda(x)$ est du signe de $g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)$ pour tout $x > 0$.
   c) Étudier les variations de g_λ. On montrera en particulier que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée m_λ.
   d) Dresser le tableau de variations de f_λ. On calculera les limites de f_λ en 0 et $+\infty$, et on montrera que $f_\lambda(m_\lambda) = \dfrac{1}{2m_\lambda^2}$.
   e) Représenter sur un même graphique les courbes $\mathcal{C}_{-1}$, $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. On donnera la valeur exacte de m_1.
3. On cherche ici un équivalent de m_λ lorsque λ tend vers $+\infty$.
   a) Montrer que pour λ assez grand, on a $\dfrac{1}{\lambda} \leqslant m_\lambda \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}$.
   Que vaut $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} m_\lambda$?
   b) En déduire, en revenant à la définition de m_λ, que $m_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda}}$.

Partie II – Étude d'une fonction intégrale

On étudie dans cette partie la fonction F définie par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_1^x f_0(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. a) Justifier que la fonction F est correctement définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
   d) Écrire le développement limité de F à l'ordre 3 au voisinage de $x = 1$.
   On pourra intégrer terme à terme un certain développement limité.
2. Établir que pour tout $x > 0$, $F(x) = F\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. a) Démontrer que $\arctan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$ et donner le développement limité de $\arctan(x)$ à l'ordre 1 en 0.
   b) Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\phi(x) = \dfrac{\arctan(x)}{x}$.
   Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
   c) Montrer que pour tout $x > 0$, $F(x) = \arctan(x)\cdot\ln(x) - \displaystyle\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t$.
   d) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.
4. Dans cette question, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.
   a) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer $I_k(x) = \displaystyle\int_1^x t^k \ln(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^n (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}$$
   c) En déduire, pour $x \in]0,1[$, un majorant de $\left|F(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^n (-1)^k I_{2k}(x)\right|$.
   d) On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|F(0) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(2n+3)^2}$.
   e) Donner, en détaillant la méthode utilisée, une valeur approchée à 10^{-2} près de $F(0)$.

Problème 2

Les parties I, II et III sont, dans une large mesure, indépendantes.

Soit n un entier naturel non nul.

Partie I

On pose $A = (X+1)^{2n} - 1$, polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer en développant A que l'on peut écrire $A = XB$ où B est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ dont on précisera le degré, le coefficient dominant et le terme constant noté b_0.
2. a) Déterminer les racines de l'équation $z^{2n} = 1$.
   b) À l'aide de la technique dite *de l'angle moitié*, écrire $\mathrm{e}^{i\theta} - 1$ sour forme factorisée pour un réel θ quelconque.
   c) Déterminer les racines de A dans $\mathbb{C}$. On posera $z_0 = 0$ et les autres racines $z_1, z_2, \dots, z_{2n-1}$ seront mises sous forme trigonométrique.

On pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

3. Montrer, à l'aide d'un changement d'indice, que $P_n = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

   En déduire que, si $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, alors $P_n = \sqrt{Q_n}$.
4. a) En développant $B = \displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} (X - z_k)$, identifier b_0 et calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k$.
   b) En déduire une expression simple de Q_n, puis montrer que $P_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$.
5. Déterminer la décomposition de $F = \dfrac{1}{A}$ en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

Partie II

On travaille dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E supposé non réduit au vecteur nul. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E, id_E est l'application identité de E et θ désigne l'application nulle. Par convention, pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $f^0 = \mathrm{id}_E$.

On étudie sur quelques cas particuliers, l'équation $(f + \mathrm{id}_E)^{2n} - \mathrm{id}_E = \theta$ où $f \in \mathscr{L}(E)$ est l'inconnue.

1. Déterminer les homothéties vectorielles solutions de l'équation proposée.
2. Calculer les sommes $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}$ et $S' = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$.

   On pourra développer $(1+1)^{2n}$ *et* $(1-1)^{2n}$ *puis calculer* $S + S'$ *et* $S - S'$.
3. Si s est une symétrie de E, exprimer $(s + \mathrm{id}_E)^{2n} - \mathrm{id}_E$ en fonction de s et id_E.
   En déduire les symétries de E solutions de l'équation proposée.

Partie III

On travaille dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$, ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$. I_3 désigne la matrice identité et O_3 la matrice nulle.

On pose $\mathcal{G} = \left\{M_{a,b} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \mid (a,b) \in \mathbb{C}^2\right\}$ où $M_{a,b}$ désigne la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ dont on précisera la dimension et une base ; vérifier que $\mathcal{G}$ est stable par produit matriciel.

On cherche désormais à résoudre l'équation matricielle :

$$(M + I_3)^{2n} - I_3 = O_3 \quad (*)$$

avec M, matrice inconnue, dans $\mathcal{G}$.
On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E.
Soient $M = M_{a,b}$ un élément de $\mathcal{G}$ tel que $b \neq 0$, u l'endomorphisme de E canoniquement associé à M et id_E, l'application identité de E.

2. Déterminer une base (e'_1) de $E_1 = \mathrm{Ker}\,(u - (a+2b)\mathrm{id}_E)$.
3. Déterminer une base (e'_2, e'_3) de $E_2 = \mathrm{Ker}\,(u - (a-b)\mathrm{id}_E)$.
4. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E ; on la note $\mathscr{B}'$.
5. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathscr{B}'$.
6. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.
   Écrire P et déterminer P^{-1} en précisant les calculs.
7. Exprimer M en fonction de P, D et P^{-1}.
8. Montrer que M est solution de l'équation $(*)$ si, et seulement si, D est solution de l'équation $(*)$.
9. Déterminer toutes les matrices D solutions de l'équation $(*)$.
10. En déduire toutes les solutions de l'équation $(*)$ dans $\mathcal{G}$.