Devoir maison n°1

– À RENDRE LE 02/09 –

Problème 1

Dans tout le problème, $\alpha \in]1,+\infty[$. On définit, sous réserve d'existence,

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha}$$

L'objectif du problème est de calculer l'intégrale $I(\alpha)$.

On rappelle que pour tous réels a et b,

$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$; $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$

Partie I – Quelques résultats préliminaires

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$.

De même, on pose pour $x \in]0,\pi]$ et $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$.

1. a) À l'aide d'une somme géométrique, établir l'égalité :

$$\forall x \in]0,\pi], \quad f_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} g_n(x)$$

   b) En déduire que g_n est prolongeable en une application continue sur $[0,\pi]$. *On note encore g_n l'application ainsi prolongée.*

   c) Montrer que l'intégrale $\int_0^\pi g_n(x)\,\mathrm{d}x$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ est constante.

2. Soit $g : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0,\pi]$, $g(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)-1}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $g(0) = 0$.

   a) Prouver que g est continue en 0.

   b) Établir l'existence et déterminer la valeur de $\lim_{x\to 0^+} g'(x)$.

   c) Établir que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\pi]$ et préciser $g'(0)$.

Partie II – Calcul d'une somme

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^\pi g(x)\sin\left((2n+1)\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

   a) Montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leqslant \dfrac{A}{2n+1}$.
   On pourra effectuer une intégration par parties dûment justifiée.

   b) En déduire la limite de u_n quand $n \longrightarrow +\infty$.

2. Déduire de la question précédente et de la question **I.1.c)** que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi g_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\mathrm{d}x = \pi$$

3. En calculant $\int_0^\pi f_n(x)\cos\left(\frac{x}{\alpha}\right)\mathrm{d}x$ de deux façons, établir que :

$$\alpha \sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 k^2 - 1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$$

Partie III – Détermination de la valeur de $I(\alpha)$

On pose, pour $x > 1$, $\varphi(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

1. a) Justifier l'existence de $\varphi(x)$ pour $x > 1$.

   b) À l'aide du changement de variable $u = t^{1-\alpha}$, montrer que :

$$\int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha} \xrightarrow[y\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}\varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

   En déduire l'existence de l'intégrale $I(\alpha)$ et l'égalité :

$$I(\alpha) = \varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha-1}\varphi\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$$

2. a) Calculer, pour $x > 1$ et $t \in [0,1]$, la somme $\sum_{k=0}^{n} (-t^x)^k$.

b) En intégrant le résultat obtenu et en passant à la limite, montrer que :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{kx+1}$$

3. Simplifier $\dfrac{(-1)^k}{\alpha k+1} + \dfrac{(-1)^{k-1}}{\alpha k-1}$ puis déduire des questions précédentes que :

$$I(\alpha) = 1 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha^2 k^2 - 1}$$

4. Conclure quant à la valeur de $I(\alpha)$ à l'aide de la partie **II**.

Problème 2

Dans tout le problème, E désignera un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.
Pour u endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$ (n fois).
On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Partie I

On pose, *dans cette partie seulement*, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
2. À l'aide de P^2, montrer que P est inversible et donner P^{-1}.
3. Calculer $P^{-1}AP$ et en déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie II

1. a) Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.
   b) Montrer que deux matrices semblables à une troisième sont elles-mêmes semblables.
2. Soient f et g deux endomorphismes de E, h l'application g restreinte à $\mathrm{Ker}(f \circ g)$, autrement dit l'application définie sur $\mathrm{Ker}(f \circ g)$ par $h(x) = g(x)$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(h) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
   b) En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}\, f \circ g) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, g) \quad (*)$
3. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 2$.
   a) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}\, u^2) = 2$ en appliquant $(*)$ à u^2 puis à u^3.
   b) Montrer qu'il existe un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$.
   En déduire que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.
   c) Écrire alors les matrices U de u et V de $u^2 - u$ dans cette base.
4. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 1$.
   a) Montrer qu'il existe un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.
   b) Justifier l'existence d'un vecteur c de $\mathrm{Ker}\, u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(b, u(b), c)$ est une base de E.
   c) Écrire alors les matrices U' de u et V' de $u^2 - u$ dans cette base.

Partie III

Soit désormais une matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On introduit pour cela $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

1. Expliquer pourquoi la matrice A est bien inversible.
2. Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.
3. On suppose ici que $N = 0$, montrer que A et A^{-1} sont semblables.
4. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.
   a) Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   En déduire, en utilisant la question **II.3.**, une matrice semblable à M.
   b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.
   c) Montrer que les matrices M et N sont semblables.
   d) Montrer alors que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
5. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$.
   Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.
6. Réciproquement, toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à T ?