Devoir maison n°1

– À RENDRE LE 02/09 –

Problème

Sous réserve d'existence, on note φ la fonction de variable réelle définie par :

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$$

Partie I – Étude de la fonction φ

1. Montrer que, pour tout réel x qui n'est pas un entier relatif, la série de terme général $u_n(x) = \dfrac{2x}{n^2 - x^2}$ est convergente.

Dans la suite, on posera $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. La fonction φ est donc définie sur D.

2. a) Justifier que φ est impaire.
   b) Vérifier, pour x dans D, que $\dfrac{2x}{n^2 - x^2} = \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$.
   c) En déduire que la fonction φ est périodique, de période 1.
   On travaillera avec des sommes partielles avant de passer à la limite.
3. On pose, pour $x \in D \cup \{0, 1\}$,

$$g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$$

   a) Vérifier que pour tout $x \in D$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x} - g(x)$.
   b) Soit h un nombre réel de $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\left| g(x+h) - g(x) \right| \leqslant C|h| \quad \text{avec} \quad C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)(n-3/2)}$$

   c) En déduire que g est continue sur $[0, 1]$ puis que φ l'est sur $]0, 1[$.
   Qu'en déduire sur D ?
4. Étude de φ en 0 et en 1 :
   a) Déduire, à l'aide de **3.a)** et **3.c)**, que :

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \left(\varphi(x) - \frac{1}{x} \right) = 0$$

   b) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

Partie II – Étude de l'opérateur T

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ et à valeurs réelles. T est l'application définie sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0, 1], \quad [T(f)](x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

On note, pour tout entier naturel k, e_k l'élément de E défini par $e_k : x \mapsto x^k$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n le sous-espace vectoriel de E dont une base est $B_n = (e_k)_{k \in [\![0, n]\!]}$.

1. Vérifier que T est un endomorphisme de E.
2. a) Vérifier que pour tout $f \in F_n$, $T(f) \in F_n$.
   On note T_n l'endomorphisme induit par T sur F_n.
   b) Déterminer la matrice de T_n dans la base B_n.
   On exprimera ses coefficients à l'aide de coefficients binomiaux.
   c) Quelles sont les valeurs propres de T_n ? T_n est-il diagonalisable ?
3. a) Montrer que $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$.
   b) On note désormais f un élément de $\mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E)$. On a donc :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

   i – Justifier l'existence de $m = \min\limits_{x \in [0,1]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x \in [0,1]} f(x)$.
   Soient désormais $x_0, x_1 \in [0, 1]$ tels que $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$.
   ii – Montrer que $f\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = m$.
   iii – En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = m$ puis que $m = f(0)$.
   iv – Faire de même pour M ; en déduire que f est constante.
4. Pour tout x dans l'ensemble D, on note $\cot(x) = \pi \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.

a) Vérifier que cot est définie et continue sur D, qu'elle est impaire et périodique, de période 1.

b) Montrer que $\cot(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ et à l'aide d'un DL que $\cot(x) - \dfrac{1}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{\pi^2}{3}x$.

c) Obtenir des résultats similaires lorsque x tend vers 1.

d) Démontrer que, pour tout réel x dans D, on a $\dfrac{x}{2} \in D$, $\dfrac{x+1}{2} \in D$ et :

$$\cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x)$$

5. a) Vérifier que, pour tout réel x dans D, $\varphi\left(\dfrac{x}{2}\right) + \varphi\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x)$.

b) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge par continuité sur $[0,1]$.

c) En déduire que $\varphi - \cot \in \mathrm{Ker}(T - 2\mathrm{id}_E)$ puis à l'aide de **3.b)** que $\varphi = \cot$. Autrement dit :

$$\forall x \in D, \quad \cot(x) = \pi\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2} = \varphi(x)$$

6. Application :

a) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - x\cot(x)}{2x^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

b) Pour tout réel x dans $]0,1[$, on pose $\displaystyle\delta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Vérifier que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad \left|\delta(x) - \frac{x^2}{1-x^2}\right| \leqslant x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2-1)}$$

c) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

d) Montrer alors, à l'aide des questions **5.** et **6.a)**, que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

e) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$.

f) Justifier la convergence et préciser la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice

Toutes les variables aléatoires dans cet exercice sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$.

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathbf{P}(N=0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(N=k) = \left(a + \frac{b}{k}\right)\mathbf{P}(N=k-1)$$

1. On suppose dans cette question que $a = 0$ et que $b > 0$.
   a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(N=k) = \dfrac{b^k}{k!} \times \mathbf{P}(N=0)$.
   b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(N=k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b. Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose dans cette question que $a < 0$ et que $b = -2a$.
   a) Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\mathbf{P}(N=k) = 0$.
   b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre en fonction de a.
3. On suppose que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.
   a) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,
   $$\mathbf{P}(Z=k) = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k} \times \mathbf{P}(Z=k-1)$$
   b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes en fonction de n et p.
4. On revient au cas général et on suppose que N vérifie la relation de Panjer.
   a) Calculer $\mathbf{P}(N=1)$ et en déduire que $a + b \geqslant 0$.
   b) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 1$,
   $$\sum_{k=1}^{m} k\mathbf{P}(N=k) = a\sum_{k=0}^{m-1}(k+1)\mathbf{P}(N=k) + b\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{P}(N=k) \quad (\star)$$
   c) En déduire que $\displaystyle\left((1-a)\sum_{k=1}^{m} k\mathbf{P}(N=k)\right)_{m\geqslant 1}$ est majorée puis que la variable aléatoire N admet une espérance.
   d) En passant à la limite dans $(\star)$, exprimer $\mathbf{E}(N)$ en fonction de a et b.