

Devoir maison n°3

– À RENDRE LE 21/10 –

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} dt$.

1. Montrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \int_0^1 t^s \ln(t) dt$ existe et la calculer.
2. Prouver que l'ensemble de définition de la fonction H est $\mathcal{D}_H =]-1, +\infty[$.
3. Montrer que H est monotone sur \mathcal{D}_H .
4. Montrer que $t \mapsto \frac{t \ln(t)}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur $[0, 1]$.
En déduire, à l'aide d'un encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$.

5. a) Démontrer que pour tout $x > -1$, $H(x) - H(x+1) = \frac{1}{(x+1)^2}$.
b) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque $x \rightarrow -1^+$.
c) Soit $x > -1$.

i – Justifier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.

ii – Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.

iii – En déduire que $H(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.

6. a) Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,

$$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{(x+t)^2} \leq \frac{1}{(x+k)^2}$$

b) Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- ♣ 7. a) Étudier la convergence des séries $\sum H(n)$ et $\sum (-1)^n H(n)$.
b) Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H(n) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1} dt$.
c) Exprimer la valeur de cette intégrale en fonction de $H(-\frac{1}{2})$.

Problème

Dans ce problème, f désigne une fonction continue de \mathbb{R}_+ à valeurs dans \mathbb{C} , et on étudie l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, sous réserve d'existence :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt$$

On admet à cet effet le théorème de convergence dominée.

Théorème de convergence dominée – Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ une famille de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans \mathbb{K} , la famille étant indexée par un intervalle J . Soit également λ_0 un point adhérent à J . On suppose que :

- pour tout $\lambda \in J$, f_λ est continue par morceaux sur I .
- pour tout $x \in I$, $f_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \lambda_0} f(x)$ où f est une fonction continue par morceaux sur I .
- il existe une fonction φ positive et intégrable sur I vérifiant :

$$\forall \lambda \in J, |f_\lambda| \leq \varphi$$

(\rightarrow domination par une fonction intégrable ne dépendant pas de λ)

Alors, f_λ et f sont intégrables sur I et $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \int_I f_\lambda(x) dx = \int_I f(x) dx$.

Partie I – Étude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

On suppose ici que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1. Étude d'un cas particulier.

On suppose ici que p et q sont deux réels et f la fonction définie par :

$$\forall t \geq 0, f(t) = \frac{pt^2 + q}{t^2 + 1}.$$

- a) Établir pour $x > 0$, l'existence de deux réels a_x et b_x tels que :

$$\forall t > 0, \frac{f(xt) - f(t)}{t} = (p-q) \left(\frac{a_x t}{x^2 t^2 + 1} - \frac{b_x t}{t^2 + 1} \right).$$

- b) Calculer pour tout $A \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\int_0^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt$ à l'aide du changement de variable $u = t^2$ et en déduire $F(x)$.

c) Exprimer $L = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q , puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.

2. Étude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$.

a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt &= \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u} du \\ &= \int_1^x \frac{f(At)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt \end{aligned}$$

b) Établir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

c) Calculer $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{f(At)}{t} dt$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel $x > 0$. Comparer ce résultat au résultat particulier obtenu à la question 1.

3. Application aux cas où $f(t) = \arctan(t)$ et $f(t) = e^{-t}$.

a) Déterminer l'existence de la valeur de $F(x)$ pour $f : t \mapsto \arctan(t)$.

Que vaut, pour $a, b > 0$, l'intégrale définie par :

$$I(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at) - \arctan(bt)}{t} dt ?$$

b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ pour $f : t \mapsto e^{-t}$.

Partie II – Étude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge

On suppose désormais que l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

1. On suppose de plus ici que $J = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

a) Déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{f(xt)}{t} dt$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel $x > 0$.

2. Application au cas où $f(t) = \sin(t)$.

a) Établir l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour $f = \sin$.

3. Étude de $F(x)$ lorsque l'intégrale impropre $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.

a) Démontrer l'égalité suivante pour $0 < \varepsilon < A$:

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{f(xt) - f(t)}{t} dt = \int_A^{Ax} \frac{f(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$$

b) Déterminer $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u} du$ et $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t} dt$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel $x > 0$.

4. Application aux cas où $f(t) = e^{it}$ et $f(t) = \cos(t)$.

a) Démontrer la relation suivante pour $A > 1$:

$$\int_1^A \frac{e^{it}}{t} dt = \left[\frac{e^{it}}{it} \right]_1^A - i \int_1^A \frac{e^{it}}{t^2} dt$$

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t} dt$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour $f : t \mapsto e^{it}$ et $f = \cos$.