Devoir maison n°3

– À RENDRE LE 21/10 –

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$. On note, lorsque cela a un sens, $H(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour $s > -1$, l'intégrale $J_s = \displaystyle\int_0^1 t^s \ln(t)\, \mathrm{d}t$ existe et la calculer.
2. Prouver que l'ensemble de définition de la fonction H est $\mathscr{D}_H =]-1, +\infty[$.
3. Montrer que H est monotone sur $\mathscr{D}_H$.
4. Montrer que $t \mapsto \dfrac{t\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable en une fonction bornée sur $[0,1]$.
   En déduire, à l'aide d'un encadrement, $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x)$.
5. a) Démontrer que pour tout $x > -1$, $H(x) - H(x+1) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
   b) Déterminer alors un équivalent simple de $H(x)$ lorsque $x \to -1^+$.
   c) Soit $x > -1$.
      i – Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{(x+k)^2}$.
      ii – Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + H(x+n)$.
      iii – En déduire que $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$.
6. a) Prouver que pour tout $x > -1$ et tout entier naturel k non nul,
   $$\frac{1}{(x+k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2} \leqslant \frac{1}{(x+k)^2}$$
   b) Déterminer un équivalent de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

♣ 7. a) Étudier la convergence des séries $\sum H(n)$ et $\sum (-1)^n H(n)$.
   b) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n H(n) = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^2-1}\, \mathrm{d}t$.
   c) Exprimer la valeur de cette intégrale en fonction de $H\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Problème

Dans ce problème, f désigne une fonction continue de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et on étudie l'intégrale suivante pour tout réel $x > 0$, sous réserve d'existence :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{f(xt) - f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$$

Partie I – Étude de $F(x)$ lorsque f a une limite finie L en $+\infty$

On suppose ici que la fonction continue f admet une limite finie L en $+\infty$.

1. *Étude d'un cas particulier.*
   On suppose ici que p et q sont deux réels et f la fonction définie par :
   $$\forall t \geqslant 0, \quad f(t) = \frac{pt^2 + q}{t^2 + 1}.$$
   a) Établir pour $x > 0$, l'existence de deux réels a_x et b_x tels que :
   $$\forall t > 0, \quad \frac{f(xt) - f(t)}{t} = (p-q)\left(\frac{a_x t}{x^2t^2+1} - \frac{b_x t}{t^2+1}\right).$$
   b) Calculer pour tout $A \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^A \frac{f(xt) - f(t)}{t}\, \mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $u = t^2$ et en déduire $F(x)$.
   c) Exprimer $L = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ et $f(0)$ à l'aide de p et q, puis $F(x)$ en fonction de $f(0)$, L et $x > 0$.
2. *Étude de $F(x)$ pour $x > 0$ lorsque f admet une limite finie L en $+\infty$.*
   a) Démontrer les égalités suivantes pour $0 < \varepsilon < A$:
   $$\int_\varepsilon^A \frac{f(xt) - f(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \int_A^{Ax} \frac{f(u)}{u}\, \mathrm{d}u - \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{f(u)}{u}\, \mathrm{d}u$$
   $$= \int_1^x \frac{f(At)}{t}\, \mathrm{d}t - \int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\, \mathrm{d}t$$
   b) Établir qu'une fonction continue $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ ayant une limite finie L en $+\infty$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
   c) Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{f(At)}{t}\, \mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_1^x \frac{f(\varepsilon t)}{t}\, \mathrm{d}t$ à l'aide du théorème de convergence dominée.

d) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel $x>0$. Comparer ce résultat au résultat particulier obtenu à la question 1.

3. *Application aux cas où $f(t)=\arctan(t)$ et $f(t)=e^{-t}$.*

a) Déterminer l'existence de la valeur de $F(x)$ pour $f: t\mapsto \arctan(t)$. Que vaut, pour $a,b>0$, l'intégrale définie par :

$$I(a,b)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(at)-\arctan(bt)}{t}\,\mathrm{d}t\ ?$$

b) Déterminer l'existence et la valeur de $F(x)$ pour $f: t\mapsto \mathrm{e}^{-t}$.

Partie II – Étude de $F(x)$ lorsque l'intégrale $I=\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge

On suppose désormais que l'intégrale impropre $I=\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

1. On suppose de plus ici que $J=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Déterminer la nature et la valeur de $\int_0^{+\infty}\frac{f(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire la convergence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel $x>0$.

2. *Application au cas où $f(t)=\sin(t)$.*

a) Établir l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour $f=\sin$.

3. *Étude de $F(x)$ lorsque l'intégrale impropre $I=\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,dt$ converge.*

On rappelle que, dans cette partie, l'intégrale $I=\int_1^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

a) Démontrer l'égalité suivante pour $0<\varepsilon<A$:

$$\int_\varepsilon^A\frac{f(xt)-f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_A^{Ax}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^x\frac{f(\varepsilon t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

b) Déterminer $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_A^{Ax}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_1^x\frac{f(\varepsilon t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour tout réel $x>0$.

4. *Application aux cas où $f(t)=e^{it}$ et $f(t)=\cos(t)$.*

a) Démontrer la relation suivante pour $A>1$:

$$\int_1^A\frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^{it}}{it}\right]_1^A-i\int_1^A\frac{\mathrm{e}^{it}}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$.

c) En déduire l'existence et la valeur de $F(x)$ pour $f: t\mapsto \mathrm{e}^{it}$ et $f=\cos$.

♣ Partie III – Une autre méthode de calcul pour $f(t)=e^{-t}$ et $f(t)=e^{it}$

Dans cette partie, on considère les deux intégrales suivantes pour $x>0$:

$$u(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-tx}-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t,\quad v(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{itx}-\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t$$

On se propose de retrouver l'existence et les valeurs de ces intégrales *par une autre méthode, indépendante des précédentes.* On introduit pour tous réels $x>0$ et $R\geqslant 0$,

$$U(x,R)=\int_0^R\frac{\mathrm{e}^{-tx}-\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\,;\,V(x,R)=\int_0^R\frac{\mathrm{e}^{itx}-\mathrm{e}^{it}}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } \varphi(x,R)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-xR\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t$$

1. Prouver l'existence de $U(x,R)$ et $V(x,R)$ puis calculer $\frac{\partial U}{\partial R}(x,R)$ et $\frac{\partial V}{\partial R}(x,R)$.

2. a) Justifier la convergence de l'intégrale $u(x)$ pour tout $x>0$.

b) Montrer que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x>0$.

3. a) Montrer que la fonction $R\mapsto\varphi(x,R)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Donner l'expression de $\frac{\partial\varphi}{\partial R}(x,R)$ sous forme intégrale puis la calculer.

b) Vérifier l'égalité suivante pour tout $x>0$ et $R\geqslant 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial R}(x,R)-\frac{\partial V}{\partial R}(x,R)=i\frac{\partial\varphi}{\partial R}(x,R)-i\frac{\partial\varphi}{\partial R}(1,R).$$

En déduire l'égalité suivante pour tout $x>0$ et $R\geqslant 0$:

$$U(x,R)-V(x,R)=i\varphi(x,R)-i\varphi(1,R).$$

c) Pour tout $x>0$, déterminer $\lim\limits_{R\to+\infty}\varphi(x,R)$.

d) En déduire pour $x>0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x)=v(x)$.