Devoir maison n°6

– À RENDRE LE 19/01 –

Dans tout le problème :

- E désigne un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$ et la norme associée $\|\cdot\|$.
- $\mathscr{S}(E)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques de E.
- $\mathscr{T}(E)$ désigne l'ensemble des éléments u de $\mathscr{S}(E)$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient, pour tout $x \in E$, $(u(x)|x) \geqslant 0$.

Préliminaires

1. Justifier que $\mathscr{T}(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Soient $A, B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
   a) Prouver que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
   b) On suppose que B est semblable à A. Comparer $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(B)$.
   c) Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de E.
3. Rappeler la définition d'un hyperplan de E. On se donne alors un tel hyperplan H et on note G son complémentaire dans E. Déterminer (en justifiant) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
   a) G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de H.
   b) Pour tout vecteur a de G, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.
   c) Pour tout vecteur a non nul et orthogonal à H, $\mathrm{Vect}(a)$ est supplémentaire de H dans E.
   d) Le noyau de l'application Tr est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
   e) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.
4. Montrer que l'application

$$(f, g) \in \mathscr{S}(E)^2 \mapsto \langle f, g\rangle = \mathrm{Tr}(f \circ g)$$

   est un produit scalaire.
   On notera pour la suite N la norme associée à ce produit scalaire.
5. Soient $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $f_A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé.
   Donner les éléments propres de la matrice A.

Partie I

Soit $a \in E$ et u_a l'endomorphisme de E défini pour tout $x \in E$, par $u_a(x) = (x|a)a$.

1. Montrer que $u_a \in \mathscr{T}(E)$.
2. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.
   a) Écrire la matrice de u_a dans une base $\mathscr{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
   b) Déterminer alors $\mathrm{Tr}(u_a)$ et $\mathrm{Tr}(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.
   c) Soit f un endomorphisme de E. Déterminer les éléments diagonaux de la matrice $f \circ u_a$ dans la base $\mathscr{B}$ définie précédemment.
   d) Calculer alors $\mathrm{Tr}(f \circ u_a)$ en fonction de a.
3. Soit $u \in \mathscr{T}(E)$, u non nul et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.
   a) Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive.
   b) Prouver que pour tout $x \in E$, $u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}(x|b)b$.
   c) En déduire que $\mu > 0$.
   d) Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.
4. L'application $\varphi : a \in E \mapsto \varphi(a) = u_a \in \mathscr{T}(E)$ est-elle injective ? Surjective ?

Partie II

Pour cette partie du problème, f est un endomorphisme de $\mathscr{S}(E)$ qui est fixé.
Pour tout vecteur $x \in E$, on pose

$$\Phi(x) = [N(f - u_x)]^2 \quad \text{et} \quad m(f) = \inf_{x \in E} \Phi(x)$$

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, on pose :

$$h_x : t \in \mathbb{R} \mapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$$

1. Justifier l'existence de $m(f)$.
2. Prouver que pour tout $x \in E$, $\Phi(x) = [N(f)]^2 - 2(x|f(x)) + \|x\|^4$.
3. Montrer que h_x est une fonction polynomiale et préciser ses coefficients.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) = \lambda_i e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_p$$

5. Calculer alors $N(f)$ à l'aide des réels λ_i, $1 \leqslant i \leqslant p$.
6. Exprimer $\alpha = \sup\limits_{\|z\|=1} (z|f(z))$ à l'aide des λ_i.
Déterminer l'ensemble des vecteurs $z \in E$ unitaires tels que $(z|f(z)) = \alpha$.
7. On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in E$.
   a) Déterminer $h_a'(0)$.
   b) Prouver que $f(a) = \|a\|^2 a$.
   c) Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y de norme 1,

$$\Phi(a+ty) - \Phi(a) = t^2[(t+2(y|a))^2 + 2(\|a\|^2 - (y|f(y)))]$$

   d) Prouver que $m(f) = \Phi(a)$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} f(a) = \|a\|^2 a \\ \forall y \in E \text{ tel que } \|y\| = 1,\ (y|f(y)) \leqslant \|a\|^2 \end{cases}$$

8. On suppose que $\lambda_p \leqslant 0$.
   a) Prouver que $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.
   b) Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomophisme de la question **5** des préliminaires.
9. On suppose que $\lambda_p > 0$. Démontrer que $m(f) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$ et prouver que :

$$m(f) = \Phi(x) \iff x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_p \mathrm{id}_E) \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\lambda_p}$$

Partie III

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

1. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que

$$\forall i,j \in [\![1,p]\!]^2,\ m_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,p]\!],\ \sum_{j=1}^{p} m_{i,j} = 1$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à M.
   a) Prouver que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.
   b) Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.
   Soit $k \in [\![1,p]\!]$ tel que $|x_k| = \max\{|x_j|,\ 1 \leqslant j \leqslant p\}$.
   En considérant la k-ième ligne du système $MX = \lambda X$, justifier l'inégalité $|\lambda| \leqslant 1$.
   c) Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$.
   On ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$.
   d) En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $\mathscr{T}(E)$ tel que $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$.
   e) Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.
2. Soient $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1 et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé. Calculer $m(f_B)$.
Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$.
3. On prend dans cette question $p > 1$. Soient

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$$

et $f_C \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p)$ canoniquement associé.
   a) Déterminer les éléments propres de la matrice C.
   b) Calculer $m(f_C)$.
   c) Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in \mathscr{T}(E)$ tel que $m(f_C) = [N(f_C - w)]^2$.
   d) Cet endomorphisme w est-il unique ?