Devoir surveillé n°1

– SAMEDI 19 SEPTEMBRE 2020 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Exercice 1

On considère un réel a strictement positif.

1. Prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}\,dx$ converge.
2. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $J_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\sin(ax)\,dx$. Établir la convergence de l'intégrale puis montrer que :
$$J_k = \frac{a}{a^2+k^2}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer sous forme d'une intégrale :
$$R_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a^2+(k+1)^2}$$
4. Montrer que l'application $x \mapsto \dfrac{\sin(ax)}{e^x-1}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. En majorant l'intégrale obtenue à la question **3.**, en déduire que :
$$|R_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et donc que} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a}{a^2+(k+1)^2}$$

Exercice 2

On note, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

1. a) À l'aide d'une comparaison somme/intégrale, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$$
En déduire un équivalent de H_n au voisinage de $+\infty$.
   b) Montrer que la série de terme général $1/n - \ln(1+1/n)$ converge.
On note γ sa somme.
En déduire que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$ puis retrouver l'équivalent précédent.
2. Soit r un entier naturel.
Pour quelles valeurs de r la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?
Dans toute la suite on notera $S_r = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.
3. a) Soient $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\ln(1-t) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{t^k}{k} - R_n(t) \quad \text{où} \quad R_n(t) = \int_0^t \frac{x^n}{1-x}\,dx$$
   b) Montrer que $R_n(t) \leqslant -t^n \cdot \ln(1-t)$.
   c) En déduire que pour tout $t \in [0,1[$, $\ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}$.
   d) À l'aide d'un produit de Cauchy, établir alors l'égalité :
$$\forall t \in [0,1[, \quad \frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n$$
4. Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note :
$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q\,dt \quad \text{et} \quad I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p(\ln t)^q\,dt$$
   a) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

b) Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$,

$$I_{p,q}^{\varepsilon} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q}{p+1}$$

c) Exprimer alors $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$ et en déduire que :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*, \quad I_{p,q} = \frac{(-1)^q q!}{(p+1)^{q+1}}$$

5. a) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$:

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1 (\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Les 3/2 admettront l'interversion série/intégrale et les 5/2 pourront recourir au théorème d'intégration terme à terme.

b) Établir alors que l'on a $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3

Partie I – Généralités

1. Montrer que pour tout $x>0$, les séries $\sum_{n\geqslant 1}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$ et $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$ sont convergentes.

   On note φ et ψ les fonctions définies sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x>0, \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx} \quad \text{et} \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

2. Montrer que la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   Dans la suite, on admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Partie II – Un équivalent de ψ en 0^+

Soit x un réel strictement positif.

1. Justifier que, pour tout $a \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leqslant \psi(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire que, pour tout $x>0$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

4. Montrer que $\psi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{x}}$.

Partie III – Un équivalent de φ en 0^+

Soit x un réel strictement positif. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Établir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ puis donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{\mathrm{e}^x-1}$ puis que $\displaystyle\frac{\psi(x)}{\mathrm{e}^x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\mathrm{e}^{-nx}$.
3. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)\mathrm{e}^{-nx}$ et exprimer sa somme à l'aide de $\varphi(x)$ et $\psi(x)$.
4. À l'aide d'un encadrement de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)\mathrm{e}^{-nx}$, en déduire que :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$$