Devoir surveillé n°3

– SAMEDI 14 NOVEMBRE 2020 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Exercice

Soit A une matrice appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on suppose diagonalisable.
On considère l'application d_A définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par : $d_A(M) = AM - MA$.
On note enfin $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que d_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-il injectif? surjectif?
2. Montrer que l'on a pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $d_A(MN) = d_A(M)N + Md_A(N)$.
3. Montrer que A^T est diagonalisable et que A et A^T ont même valeurs propres.

On désigne alors par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les n valeurs propres des matrices A et A^T et par :

- $\mathscr{B}_1 = (X_1, \dots, X_n)$ une base de vecteurs propres de A associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$;
- $\mathscr{B}_2 = (Y_1, \dots, Y_n)$ une base de vecteurs propres de A^T associée à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

On pose enfin $M_{i,j} = X_i Y_j^T$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

4. Exprimer $d_A(M_{i,j})$ en fonction de $M_{i,j}$, λ_i et λ_j pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

On note P et Q les matrices de passage de la base $(e_1, \dots, e_n)$ aux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.
et on considère l'application ψ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par $\psi(M) = PMQ^T$.

5. Calculer explicitement $e_i e_j^T$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$.
6. Préciser les produits Pe_i et Qe_j pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$ puis calculer $\psi(e_i e_j^T)$.
7. Montrer que l'application ψ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et en déduire que la famille $(M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
8. En déduire que l'endomorphisme d_A est diagonalisable.

Problème

Pour x réel, on pose en cas de convergence :

$$\theta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-nx}\right)$$

Objectifs – On se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions θ et f. Dans la partie **I**, on calcule une valeur exacte et une valeur approchée de $\theta(n)$ pour deux entiers naturels n. La partie **II** est consacrée à une étude de la fonction f en liaison avec $\theta(2)$. Dans la partie **III**, on étudie de façon plus précise la continuité et le caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction θ.

Partie I – Quelques valeurs de la fonction θ

1. *Calcul de* $\theta(1)$
   a) Préciser, selon la valeur du réel x, la limite de $\dfrac{1}{n^x}$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
   b) Montrer que l'ensemble de définition de la fonction θ est $E =]0, +\infty[$.
   c) Pour tout entier naturel n, on pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$.
      i – Préciser une primitive de la fonction $t \mapsto \tan t$ et calculer J_1.
      ii – Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.
      iii – Calculer $J_n + J_{n+2}$ pour tout entier naturel n.
      iv – En utilisant la résultat précédent, établir (par exemple par récurrence), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :
      $$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1}$$
      v – En déduire la valeur de $\theta(1)$.
2. *Une valeur approchée de* $\theta(3)$

   Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$.

   a) Décrire en langage `Python` un algorithme de calcul de S_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   b) En utilisant l'algorithme précédent et la calculatrice, donner la valeur décimale approchée par défaut σ de S_{30} à la précision 10^{-4}.
   c) Montrer que σ est aussi la valeur décimale approchée par défaut de $\theta(3)$ à la précision 10^{-4}.

Partie II – Étude d'une fonction

Pour tout entier naturel n et tout réel x, on note $u_n(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$.
On rappelle que sous réserve de convergence,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$$

On étudie quelques propriétés de f en admettant que $\theta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $]0,+\infty[$.

On note désormais $\mathscr{E}$ l'image par f de l'intervalle $]0,+\infty[$.

2. Montrer que la fonction f est continue sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que la fonction f est strictement monotone sur $]0,+\infty[$.
4. Justifier l'affirmation : « $\mathscr{E}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ».
5. Montrer que la fonction f admet une limite finie λ (à préciser) en $+\infty$.
6. Pour tout $x>0$, on désigne par ψ_x la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\psi_x(t) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-tx}\right)$$

   a) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

   b) Établir, pour tout réel $x>0$, la double inégalité :

$$\int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \ln(2) + \int_0^{+\infty} \psi_x(t)\,\mathrm{d}t$$

   c) Montrer l'existence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y$ et exprimer sa valeur en fonction de $\theta(2)$.
   On rappelle que pour tout $y \in]-1,1[$, $\ln(1-y) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n}$.

   d) Montrer qu'il existe une constante μ (que l'on précisera) telle que pour tout réel x strictement positif, on ait la double inégalité :

$$\frac{\mu}{x} \leqslant f(x) \leqslant \lambda + \frac{\mu}{x}$$

   e) En déduire un équivalent de $f(x)$ en 0 et préciser l'intervalle $\mathscr{E}$.

Partie III – Propriétés de la fonction θ

1. Montrer que pour tout réel x de $E =]0,+\infty[$, $1 - \frac{1}{2^x} \leqslant \theta(x) \leqslant 1$.
2. En déduire que la fonction θ est bornée sur E et qu'elle admet une limite finie en $+\infty$; on précisera cette limite.
3. *Continuité de la fonction θ*
   a) Montrer, par convergence normale, la continuité de θ sur $]1,+\infty[$.
   b) Montrer que la fonction θ est continue sur E.
4. *Caractère $\mathscr{C}^1$ de la fonction θ*
   a) Soient $x>0$ et $\varphi_x : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^x}$ définie sur l'intervalle $[2,+\infty[$.
   Étudier les variations de la fonction φ_x sur l'intervalle $[2,+\infty[$; on précisera l'étude dans les deux cas $x \geqslant \frac{1}{\ln(2)}$ et $x \in]0, 1/\ln(2)[$.
   b) Démontrer avec soin que la fonction θ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[1/\ln(2),+\infty[$ et l'intervalle $]0,+\infty[$.
   c) Déterminer les signes de $\theta'(2)$ et de $\theta'(1)$.

Exercice (🚲)

On pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$, $S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$ et $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $u \in]-1,1[$, étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{\mathrm{e}^t - u}$ $(\gamma \in \mathbb{R})$.

Soient $t \geqslant 0$ et $u \in]-1,1[$. On pose $R_N(t,u) = \left(\frac{u}{\mathrm{e}^t - u} - u\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{N-1}(u\mathrm{e}^{-t})^n\right) t^{\alpha-1}$.

3. Simplifier l'expression de R_N, en l'écrivant sous forme d'une fraction.
4. Prouver que pour tout $u \in]-1,1[$, $\lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t,u)\,\mathrm{d}t = 0$.
5. Montrer que pour tous $\alpha > 0$ et $u \in]-1,1[$, $\int_0^{+\infty} \frac{u\,t^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^t - u}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha}$.
6. On admet que l'identité reste vraie aussi pour $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ où $x \in]0,2\pi[$.
   En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'identité suivante :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t$$