# Devoir surveillé n°3

– Samedi 20 novembre 2021 –

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*
*Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h. La calculatrice est autorisée.*

## **Exercice** (e3a)

On note $f$ la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+(nx)^2}$ et $I$ l'intervalle $]0,+\infty[$.

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $I$ puis préciser son sens de variation.
2. Prouver que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$.
3. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
4. a) Vérifier que pour tous $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in I$ :
$$\frac{1}{1+(p+1)^2x^2}\leqslant\int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}\leqslant\frac{1}{1+p^2x^2}$$
   b) En déduire un équivalent de $f$ au voisinage de 0.
5. Donner l'allure de la courbe représentative de $f$.
6. Justifier pour tout $x\in I$, l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$.
7. a) Soient $k\in\mathbb{N}^*$ et $x\in I$.
   Justifier l'existence de l'intégrale $J_k=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-kxt}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ et montrer que $J_k=\dfrac{1}{1+k^2x^2}$.
   b) En déduire que pour tout $x\in I$,
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{xt}-1}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+(nx)^2}$$

## **Problème** (CCINP)

*Notations et objectifs* – Dans tout ce problème, on note :

- $\mathscr{C}^0$ : le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
- $\mathscr{C}^0_1$ : le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}^0$ des fonctions 1-périodiques (c'est-à-dire des fonctions $f$ telles que $f(x+1)=f(x)$, pour tout $x\in\mathbb{R}$).

On désigne par $\theta$ l'application de $\mathscr{C}^0$ dans $\mathscr{C}^0$, définie par :
$$\forall f\in\mathscr{C}^0,\quad \theta(f)=F\quad\text{où}\quad F:x\mapsto\int_x^{x+1}f(t)\,\mathrm{d}t$$

On admet que $\theta$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction $F$ et de l'endomorphisme $\theta$.

### Partie I – Quelques propriétés de $F=\theta(f)$

1. *Exemples*
   a) Expliciter $F(x)$, si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=1$.
   b) Expliciter $F(x)$, si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t^k$ (où $k\in\mathbb{N}^*$).
2. *Variations de $F=\theta(f)$*
   On désigne par $f$ une fonction arbitraire de $\mathscr{C}^0$.
   a) Exprimer $F(x)$ à l'aide d'une primitive $G$ de $f$. Montrer que la fonction $F$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Expliciter $F'(x)$.
   b) Montrer que si $f$ est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $J_{x_0}=[x_0,+\infty[$, alors $F$ est croissante (resp. décroissante) sur $J_{x_0}$.
   c) Montrer que $F=\theta(f)$ est constante sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $f\in\mathscr{C}^0_1$.
   d) Expliciter $F(x)$, si $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=|\sin(\pi t)|$.
   *On suppose de nouveau que $f$ désigne une fonction arbitraire de $\mathscr{C}^0$.*
   e) On suppose que la fonction $f$ admet une limite $L_1$ en $+\infty$.
   Montrer que la fonction $F$ admet une limite $L_2$ (que l'on explicitera) en $+\infty$ ; on pourra étudier d'abord le cas où $L_1=0$.
3. *Étude d'un exemple*

   Soit $f(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-kt^2}}{k^2+1}$, pour $t$ réel.

a) Montrer que la fonction $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
b) La fonction $f$ est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ?
c) Montrer que $f$ et $F$ admettent une limite (à préciser) en $+\infty$.
d) Indiquer l'allure de la représentation graphique de la fonction $f$.
*On ne cherchera pas à préciser $f(0)$.*

## Partie II – L'endomorphisme $\theta$

1. L'endomorphisme $\theta$ est-il surjectif ?
2. *Sur le noyau de $\theta$*
   a) Montrer que :

$$f \in \operatorname{Ker}(\theta) \iff \left( f \in \mathscr{C}_1^0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right)$$

   b) Soit $(f,g) \in \left(\mathscr{C}_1^0\right)^2$. On note $\langle f|g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

   On admettra sans justification, que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}_1^0$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $c_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $c_k(t) = \cos(2\pi k t)$.
   i – Vérifier que $c_k \in \mathscr{C}_1^0$ et calculer $\langle c_j|c_k\rangle$ pour tout $(j,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   ii – $\operatorname{Ker}(\theta)$ est-il de dimension finie ?

   c) Soient $f \in \mathscr{C}_1^0$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\phi_n(x) = \displaystyle\int_n^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $x \in [n, n+1]$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

   i – Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $W_n = \dfrac{\phi_0(1)}{n+1} + \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\phi_n(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
   ii – Pour $f \in \operatorname{Ker}(\theta)$, quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} W_n$ ?
   iii – Pour $f \notin \operatorname{Ker}(\theta)$, quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} W_n$ ?
3. *Sur le spectre de $\theta$*
   On note $\operatorname{Sp}(\theta)$ le spectre réel de l'endomorphisme $\theta$. Si $a$ est un nombre réel fixé, on note $h_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h_a(t) = \mathrm{e}^{at}$.
   a) Montrer que chaque $h_a$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $\theta$.
   b) Étudier les variations de la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^u - 1}{u}$ pour $u \in \mathbb{R}^*$.
   c) Expliciter l'ensemble $\operatorname{Sp}(\theta) \cap \mathbb{R}^+$.

## Partie III – Une suite de fonctions propres de l'endomorphisme $\theta$

Soit $\lambda$ une valeur propre de l'endomorphisme $\theta$ ; on note $E_\lambda$ le sous-espace propre associé. On suppose par la suite $\lambda > 0$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $I_k = ]2k\pi, (2k+1)\pi[$ et, pour tout $t \in I_k$,

$$g(t) = t \cdot \frac{\cos(t)}{\sin(t)} + \ln\left(\frac{\sin(t)}{\lambda t}\right)$$

   a) Soit $\rho$ la fonction définie sur $I_k$ par : $\rho(t) = t\sin(2t) - t^2 - \sin^2(t)$.
   Étudier la fonction $\rho$ sur $I_k$ et préciser son signe.
   b) Montrer que $g$ définit une bijection de $I_k$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à préciser.
2. On se propose de montrer l'existence, dans $E_\lambda$, d'une suite (non triviale) $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres. Soit $\gamma = a + ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$.
   a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_x^{x+1} \mathrm{e}^{\gamma t}\,\mathrm{d}t$.
   b) À quelle condition nécessaire et suffisante la fonction $h$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $h(t) = \mathrm{e}^{at}\cos(bt)$ est-elle un vecteur propre de l'endomorphisme $\theta$ associé à la valeur propre $\lambda$ ?
3. En déduire une suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions propres de l'endomorphisme $\theta$.