L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Notations et rappels

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 3$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathcal{L}(E)$ désigne la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E. Si $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v$ se note uv et l'identité est notée I_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{m} a_k u^k$ où les u^p sont définis par les relations $u^0 = I_E$ et $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\ u^p = uu^{p-1}$. On rappelle que si $P,\ Q \in \mathbb{K}[X]$, les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Si u est un endomorphisme de E, le polynôme minimal de u sera noté π_u et le polynôme caractéristique se notera χ_u ; on rappelle que π_u est le polynôme unitaire de degré minimal annulateur de u, c'est le générateur unitaire de l'idéal des polynômes annulateurs de u, et que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \chi_u(\lambda) = \det(u - \lambda\, I_E)\ .$$

Un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On rappelle que pour un tel endomorphisme, en dimension n, le polynôme caractéristique vaut $(-1)^n X^n$.

1ère Partie
Résultats préliminaires

A- Calcul de la dimension d'un sous-espace vectoriel de E

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de u et $p \in \mathbb{N}^*$ son ordre de multiplicité ; on sait qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\chi_u = (X - \lambda)^p Q \quad \text{et} \quad Q(\lambda) \neq 0.$$

On pose $F_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda I_E)^p$.

1. Montrer que $E = F_\lambda \oplus \operatorname{Ker} Q(u)$ et que les sous-espaces vectoriels F_λ et $\operatorname{Ker} Q(u)$ sont stables par u .

2. On désigne par v (respectivement w) l'endomorphisme de F_λ (respectivement $\operatorname{Ker} Q(u)$) induit par u.

   (a) Que peut-on dire de l'endomorphisme $(v - \lambda I_{F_\lambda})$ de F_λ ?

   (b) Calculer χ_v en fonction de λ et $d = \dim(F_\lambda)$ puis montrer que

   $$\chi_u = (-1)^d (X - \lambda)^d \chi_w$$

   avec la convention $\chi_w = 1$ si $\operatorname{Ker} Q(u) = \{0_E\}$.

   (c) Montrer que $\chi_w(\lambda) \neq 0$ et conclure que $p = d$.

B- Un résultat sur le polynôme minimal

Soit u un endomorphisme de E.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal noté $\pi_{x,u} \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\pi_{x,u}(u)(x) = 0_E$, puis justifier que $\pi_{x,u}$ divise π_u.
2. En déduire que l'ensemble $\{\pi_{x,u},\ x \in E \setminus \{0_E\}\}$ est fini.
3. On pose $\pi_u = P_1^{\alpha_1} \dots P_r^{\alpha_r}$ où $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ et les P_i irréductibles et deux à deux distincts. Montrer que pour tout i de $\{1, \dots, r\}$, il existe $y_i \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P_i^{\alpha_i}$ divise $\pi_{y_i,u}$, puis construire un élément $x_i \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $P_i^{\alpha_i} = \pi_{x_i,u}$. (*Raisonner par l'absurde et utiliser 2.*)
4. Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0_E\})^2$; on suppose que les polynômes $R = \pi_{x,u}$ et $S = \pi_{y,u}$ sont premiers entre eux. Justifier que $x + y \neq 0$, puis montrer que $\pi_{x+y,u} = RS$.
5. Déduire de ce qui précède qu'il existe $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $\pi_{e,u} = \pi_u$.

2ème Partie
Étude de $\mathcal{C} = \{u \in \mathcal{L}(E),\ \deg(\pi_u) = n - 1\}$.

A- Le cas d'un endomorphisme nilpotent

Soit $v \in \mathcal{L}(E)$; on suppose que $v^{n-1} = 0$ et $v^{n-2} \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\operatorname{Ker} v^k \subset \operatorname{Ker} v^{k+1}$$
et que
$$\operatorname{Ker} v^k = \operatorname{Ker} v^{k+1} \Longrightarrow \operatorname{Ker} v^{k+1} = \operatorname{Ker} v^{k+2}.$$
2. En déduire que
$$\{0_E\} \subsetneq \operatorname{Ker} v \subsetneq \operatorname{Ker} v^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-2} \subsetneq \operatorname{Ker} v^{n-1} = E.$$
3. Montrer alors que pour tout $k \in \{1, \dots, n-2\}$,
$$k \leqslant \dim(\operatorname{Ker} v^k) \leqslant k + 1.$$
4. Supposons que pour $p \in \{1, \dots, n-2\}$ on ait : $\dim(\operatorname{Ker} v^p) = p$ et $\dim(\operatorname{Ker} v^{p+1}) = p + 2$; montrer que $\dim(\operatorname{Ker} v^p) \geqslant \dim(\operatorname{Ker} v^{p-1}) + 2$ et trouver une contradiction.
(*On pourra utiliser $v(F)$ où F est un supplémentaire de* $\operatorname{Ker} v^p$ *dans* $\operatorname{Ker} v^{p+1}$).
5. En déduire que pour tout $q \in \{1, \dots, n-2\}$, $\dim(\operatorname{Ker} v^q) = q + 1$.
6. Montrer que $\operatorname{Ker} v \not\subset \operatorname{Im} v$.
(*On pourra raisonner par l'absurde et considérer l'endomorphisme g induit par v sur* $\operatorname{Im} v$).
7. Soient $x_0 \in \operatorname{Ker} v \setminus \operatorname{Im} v$ et $y \in E \setminus \operatorname{Ker} v^{n-2}$.
   (a) Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $H = \operatorname{vect}(\{y, v(y), \dots, v^{n-2}(y)\})$.
   (b) Vérifier que H et $\mathbb{K}x_0$ sont supplémentaires dans E et que H est stable par v.
   (c) Vérifier que $(y, v(y), \dots, v^{n-2}(y), x_0)$ est une base de E et écrire la matrice J de v dans cette base.

B- Cas général

1. Soient $R = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de R. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice M relativement à $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & a_{n-3} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

   (a) Pour $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, exprimer $u^k(e_1)$ en fonction des éléments de la base $\mathcal{B}$.

   (b) Calculer $R(u)(e_1)$ puis $R(u)(e_k)$, pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, et enfin $R(u)(e_n)$; en déduire que R est un polynôme annulateur de u.

   (c) Montrer que le degré du polynôme minimal π_u de u est supérieur ou égal à $n-1$ et en déduire R coïncide avec π_u puis que $u \in \mathcal{C}$. (*On pourra raisonner par l'absurde*).

   (d) Déterminer χ_u en fonction de R et α.

2. Soit $u \in \mathcal{C}$.

   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha)\pi_u$ et que $\pi_u(\alpha) = 0$.

   Dans la suite, k désigne l'ordre de multiplicité de la valeur propre α de u. On sait, puisque $\chi_u = (-1)^n (X - \alpha)\pi_u$, qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\pi_u = (X - \alpha)^{k-1} Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0.$$

   (b) Montrer que

$$E = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k \oplus \operatorname{Ker} Q(u) = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} \oplus \operatorname{Ker} Q(u);$$

   en déduire que

$$\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-2} \subsetneq \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^{k-1} = \operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k.$$

   (c) On désigne par v l'endomorphisme de $\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k$ induit par $u - \alpha I_E$.

      i. Vérifier que $v^{k-1} = 0$ et $v^{k-2} \neq 0$.

      ii. En déduire qu'il existe un vecteur propre x_0 de u, associé à la valeur propre α, et un sous-espace vectoriel H_1 de $\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k$, stable par u, tels que

$$\operatorname{Ker}(u - \alpha I_E)^k = \mathbb{K}x_0 \oplus H_1.$$

   (d) Montrer que la somme $H = H_1 + \operatorname{Ker} Q(u)$ est directe et que le sous-espace vectoriel H est un supplémentaire de $\mathbb{K}x_0$ dans E, qui est stable par u.

   (e) On désigne par w l'endomorphisme induit par u sur H.

      i. Montrer que $\chi_u = (\alpha - X)\chi_w$, puis en déduire $\pi_w(\alpha)$.

      ii. Montrer que π_w est un polynôme annulateur de u, puis que $\deg(\pi_w) = n - 1$.

(f) En utilisant la question B-5 des préliminaires, montrer que H possède une base du type $(e, w(e), \ldots, w^{n-2}(e))$, avec $e \in H$, et écrire la matrice de w dans cette base.

(g) Construire alors une base $\mathcal{B}_1$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme (1).

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, π_A son polynôme minimal. Montrer que $\deg(\pi_A) = n-1$ si et seulement s'il existe une matrice P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $a_0, \ldots, a_{n-2},\ \alpha$, éléments de $\mathbb{K}$, avec $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$ tels que $P^{-1}AP$ soit de la forme (1).
Justifier que lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on peut choisir P dans $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \det M > 0\}$.

3ème Partie

Dans cette partie, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est muni de la norme $\|.\|$: $A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \Big(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$; $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ désigne $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On se propose de montrer la connexité par arcs de l'ensemble

$$\boldsymbol{\mathcal{C}(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \deg(\pi_A) = n-1\}.}$$

1. (a) Montrer que l'application $\det :\ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K},\ A \mapsto \det A$ est continue et que $\mathrm{G}(\mathbb{K})$ est un ouvert.

   (b) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.

   (c) Soit $(A, H) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Montrer que $A+H$ est une matrice inversible et exprimer $(A+H)^{-1} - A^{-1}$ comme la somme d'une série.
   (*On pourra écrire $A + H = A(I_n + A^{-1}H$.*)

   (d) En déduire que l'application $\mathcal{I} :\ \mathrm{G}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A \mapsto A^{-1}$ est continue.

2. (a) Soient A et B deux éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $T(x) = \det(xB + (1-x)A)$, $x \in \mathbb{C}$, est un polynôme en x, à coefficients complexes, et que T n'est pas le polynôme nul.

   (b) Soient $z_1, \ldots, z_p$ les racines de T et soit $r > 0$,
   soit $\phi :\ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \phi(t) = \gamma(t)B + (1-\gamma(t))A$ avec $\gamma(t) = \begin{cases} t(1+2ir) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}; \\ t + 2ir(1-t) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$

      i. Montrer que ϕ est continue et calculer $\phi(0)$ et $\phi(1)$.

      ii. Montrer que l'on peut choisir r tel que ϕ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et conclure.
      (*Si $I = \{i \in \{1, \ldots, p\}, \operatorname{Im} z_i > 0\}$ n'est pas vide, choisir $r < \min\{\operatorname{Im} z_i, i \in I\}$.*)

3. On admet que $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs. J étant la matrice vue à la question A-7-c de la 2ème partie, montrer que l'ensemble $\{PJP^{-1}, P \in \mathrm{G}(\mathbb{K})\}$ est connexe par arcs.

4. Soit M une matrice de la forme (1) où $a_0, \ldots, a_{n-2}$ et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ tels que $\alpha^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-2} a_k \alpha^k$. En remplaçant dans M les éléments $a_1, \ldots, a_{n-2}$ respectivement par $ta_1, \ldots, ta_{n-2}$, α par $t\alpha$ et a_0 par $\varepsilon(t) + a_0$, où $\varepsilon(t) = (t\alpha)^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} ta_k(t\alpha)^k - a_0$, montrer que l'on obtient une matrice $M(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ et que l'application $\psi :\ [0,1] \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), t \mapsto M(t)$ est continue ; calculer $\psi(0)$ et $\psi(1)$.

5. Déduire de ce qui précède que $\mathcal{C}(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

FIN DE L'ÉPREUVE