# Devoir surveillé n°6

– Samedi 23 janvier 2021 –

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.*
*Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.*

## Problème 1

Dans ce problème, $n$ désigne un entier supérieur ou égal à 2 et on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

### Partie I

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

$$\text{(i) } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0 \qquad \text{(ii) } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \lambda \geqslant 0$$

$$\text{(iii) } \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = B^2$$

$A$ est alors dite symétrique positive et on note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
On admet l'équivalence des trois propositions suivantes :

$$\text{(i) } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX > 0 \qquad \text{(ii) } \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ \lambda > 0$$

$$\text{(iii) } \exists B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = B^2$$

$A$ est alors dite symétrique définie positive et on note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.

### Partie II

Dans toute cette partie, $E$ est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathscr{C} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de $E$.

1. Soient $J$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $M = -J + (\alpha+1)I_n$.
   a) Déterminer les éléments propres de $J$. En déduire ceux de $M$.
   b) Pour quelles valeurs de $\alpha$ a-t-on $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ?
   Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.
2. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $a$ l'endomorphisme de $E$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(a) = A$.
   a) Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de $E$ constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme $a$.
   On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i$ la valeur propre associée au vecteur propre $u_i$.
   b) Soit $b$ l'endomorphisme de $E$ défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\, u_i$.
   Justifier que $b$ est un endomorphisme symétrique.
   c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$.
3. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow a_{i,j} < 0)$.
   $a$ désigne toujours l'endomorphisme de $E$ dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est $A$ et $b$ l'endomorphisme de $E$ tel que défini à la question **2.b**.
   a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.
   Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\langle z_i, z_j \rangle$ en fonction de $a_{i,j}$ et en déduire le signe de $\langle z_i, z_j \rangle$ pour $i = j$ et $i \neq j$.
   b) On souhaite montrer que la famille $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ est libre.
   On considère pour cela des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i z_i = 0$.
      i – Montrer que l'on a $\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i = 0$.
      ii – Conclure en utilisant le produit scalaire $\left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i| z_i\, ,\, z_n \right\rangle$.
   c) Prouver que $\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

### Partie III

Soient $A$ et $A'$ deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in [0, 1]$. On cherche à établir l'inégalité :

$$\det\left(tA + (1-t)A'\right) \geqslant (\det A)^t \left(\det A'\right)^{1-t} \qquad (*)$$

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (strictement positives) de $A$.

1. Montrer à l'aide de la fonction ln que $\prod_{i=1}^{n} (t\lambda_i + (1-t)) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^t$.
2. En déduire que l'inégalité $(*)$ est vraie pour $A' = I_n$.
3. À l'aide de la partie **I**, montrer l'inégalité $(*)$ pour $A' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

## Problème 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note par la suite $\|\cdot\|_\infty$ la norme usuelle sur $\mathbb{C}^n$ définie pour $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ par $\|(z_1,\dots,z_n)\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i|$.

On identifiera le $n$-uplet $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n$ au vecteur colonne $\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $|||A|||_\infty = \sup\limits_{\substack{X\in\mathbb{C}^n \\ \|X\|_\infty\leqslant 1}} \|AX\|_\infty$.

Enfin, pour $Z \in \mathbb{C}^n$ et $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N_P(Z) = \|PZ\|_\infty$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   a) Montrer que l'application $X \mapsto \|AX\|_\infty$ est continue sur la boule unité fermée de $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty)$.
   b) En déduire l'existence de $|||A|||_\infty$.
2. Montrer que $|||\cdot|||_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de la forme $\operatorname{diag}(m_{11},\dots,m_{nn})$.
   a) On pose $m = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |m_{ii}|$. Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $\|DZ\|_\infty \leqslant m\|Z\|_\infty$.
   b) Déterminer $|||D|||_\infty$
4. a) Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N_P$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $P$ est une matrice inversible.
   *Lorsque $P$ est inversible, on notera dorénavant $\|\cdot\|_P$ pour $N_P$ et on admettra que l'application $|||\cdot|||_P$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par*
   $$|||A|||_P = \sup_{\substack{X\in\mathbb{C}^n \\ \|X\|_P\leqslant 1}} \|AX\|_P$$
   *est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*
   b) On se donne une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que :
   $$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty$$
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\operatorname{Sp}(M)$ l'ensemble des valeurs propres de $M$ et on définit $\rho(M)$ par $\rho(M) = \max\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(M)} |\lambda|$.
   a) Montrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.
   b) Soit $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \leqslant |||A|||_P$.
   c) On suppose $A$ diagonalisable.
   Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) = |||A|||_P$.
   d) *Exemple* – Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $\rho(A)$.
   Déterminer l'inverse d'une matrice $P \in \mathcal{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.
   e) *Exemple* – Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j} = j$.
   Déterminer l'inverse d'une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P = \rho(A)$.
6. Dans cette question, $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   a) On pose $m = \max(|a|+|b|, |c|+|d|)$.
   Montrer que pour $Z \in \mathbb{C}^2$, on a $\|AZ\|_\infty \leqslant m\|Z\|_\infty$. Déterminer $|||A|||_\infty$.
   b) On suppose $A$ non diagonalisable. On note $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à $A$.
      i – Démontrer que $\operatorname{Sp}(A)$ ne contient qu'un seul élément, noté $\alpha$.
      ii – Démontrer l'existence d'une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{C}^2$ telle que :
      $$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$
      iii – Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer l'existence d'une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{C}^2$ telle que :
      $$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad |\beta'| \leqslant \varepsilon$$
      iv – En déduire l'existence de $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leqslant \rho(A) + \varepsilon$.
   c) Déterminer $\inf\limits_{P\in\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})} |||A|||_P$.
   d) *Exemple* – Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
   Calculer $|||A|||_\infty$ et montrer qu'il existe $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leqslant 2$.
   e) On suppose que $\rho(A) < 1$.
   Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P < 1$.
   Que peut-on en déduire concernant la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ ?