Devoir surveillé n°7

– SAMEDI 6 FÉVRIER 2021 –

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.
Cet énoncé comporte 2 pages. Durée : 4h.

Problème – Étude asymptotique de la loi normale

Partie I

1. Justifier l'existence des deux intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

Établir par ailleurs une relation simple entre I et J.

2. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ puis calculer $F(0)$.
3. Établir que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
4. a) Démontrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout réel $a > 0$, puis que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   b) Vérifier que pour tout $x > 0$, $F'(x) - F(x) = -\dfrac{I}{\sqrt{x}}$.
5. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction $G : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}F(x)$.
En déduire, à l'aide des questions **3** et **4**, que :

$$\forall x > 0, \quad G(x) = \mathrm{e}^{-x}F(x) = I \times \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

6. En déduire les valeurs de I et J.

Partie II

1. Soit $H(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Justifier que H est ainsi définie sur $\mathbb{R}$, impaire, et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de H'. En déduire que H est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, en précisant ce développement ainsi que le rayon de convergence.
3. Soit $K(x) = \mathrm{e}^{x^2}H(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Préciser la parité de K puis démontrer à l'aide d'un produit de Cauchy que K est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et justifier l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad K(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1} \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{(2i+1)i!(n-i)!}$$

4. a) Déterminer une équation différentielle du premier ordre dont K est solution sur $\mathbb{R}$.
   b) Rechercher les solutions de cette équation de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{2n+1}$.
   En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(2n+1)u_n = 2u_{n-1}$.
   c) Exprimer alors u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie III

1. Soit $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que ϕ est bien définie et établir une relation entre ϕ et G.
2. Justifier que ϕ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$; préciser la valeur de $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \phi(x) = 0$ puis calculer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \phi(x)$ à l'aide de la valeur de I déterminée dans la partie **I**.
4. Prouver l'existence d'un polynôme réel P et d'une constante réelle C, que l'on explicitera, tels que :

$$\forall x > 0 \quad \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-x^2} P\left(\frac{1}{x}\right) + C \int_{x^2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

5. En déduire un équivalent simple de $\phi(x)$ quand $x \to +\infty$ et justifier l'intégrabilité de ϕ sur $\mathbb{R}_+$.
6. Au moyen d'une intégrale, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 1 – Comportement asymptotique d'une marche aléatoire

On modélise une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ de la façon suivante :

- on travaille tout du long dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$;
- on se donne une suite de variables indépendantes $(X_n)_{n\geqslant 1}$, de même loi donnée par $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
- on pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Le but de cet exercice est d'étudier la variable aléatoire $|S_n|$ exprimant, en fonction du temps, la distance du marcheur à son point d'origine et, notamment, de calculer un équivalent de son espérance et de sa variance.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi suivie par $Y_n = (X_n + 1)/2$?
   En déduire la loi de la variable $\dfrac{S_n + n}{2}$.
2. Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$, $\mathbf{V}(S_n)$ et $\mathbf{E}(S_n^2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Que vaut $\mathbf{P}(S_{2n+1} = 0)$? *On justifiera soigneusement la réponse.*
4. On pose $u_n = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer une expression de u_n à l'aide du nombre $\dbinom{2n}{n}$.
5. Déterminer un équivalent de u_n à l'aide de la formule de Stirling.
6. Déterminer $|S_n|(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire une relation entre $\mathbf{P}(|S_{n+1}| = 1)$, $\mathbf{P}(|S_n| = 0)$ et $\mathbf{P}(|S_n| = 2)$.
8. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, écrire une relation entre
   $$\mathbf{P}(|S_{n+1}| = k),\ \mathbf{P}(|S_n| = k-1) \ \text{ et } \ \mathbf{P}(|S_n| = k+1)$$
9. Montrer alors que $\mathbf{E}(|S_{n+1}|) = \mathbf{E}(|S_n|) + \mathbf{P}(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. En déduire, pour tout $n \geqslant 1$, les valeurs de $\mathbf{E}(|S_{2n-1}|)$ et de $\mathbf{E}(|S_{2n}|)$ en fonction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
11. Prouver par une comparaison avec une intégrale que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.
12. À l'aide d'une comparaison de séries divergentes, déduire de tout ce qui précède un équivalent de $\mathbf{E}(|S_{2n}|)$, puis de $\mathbf{E}(|S_n|)$ et $\mathbf{V}(|S_n|)$.

Exercice 2 – Spectre d'une matrice aléatoire

1. Soient a et b deux réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   a) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la matrice A soit inversible. Donner, dans ce cas, A^{-1}.
   b) Montrer que A est semblable à $\Delta = \operatorname{diag}(a - b, a + b)$ puis exprimer les coefficients de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soient p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1 - p$.
   On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes et suivant une même loi géométrique de paramètre p.
   Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 :
   $$M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$$
   a) Rappeler la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
   b) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = k, Y = k)$.
   c) En déduire que la probabilité de l'événement $(X = Y)$ est donnée par :
   $$\mathbf{P}(X = Y) = \frac{p}{2 - p}$$
   Quelle est la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega\,;\, M(\omega) \text{ est inversible}\}$?
3. On note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$; on définit ainsi deux variables aléatoires sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.
   a) Exprimer les variables S et D en fonction des variables X et Y, puis calculer la covariance des variables aléatoires S et D.
   b) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(S = 2, D = 0), \mathbf{P}(S = 2)$ et $\mathbf{P}(D = 0)$.
   Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?
   c) Montrer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, que :
   $$\mathbf{P}(S = n) = (n - 1)p^2 q^{n-2}$$
   d) En déduire, lorsque p est égal à $2/21$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.