Problèmes d'été

Les trois problèmes ci-dessous ont pour objectif de vous accompagner dans vos révisions estivales. Ils couvrent une partie substantielle – mais limitée – du programme de première année. Ce travail est à remettre le jeudi 1^{er} *septembre. Si certaines des questions ci-dessous vous résistent, n'hésitez pas à m'adresser un mail. Bon été à toutes et à tous !*

Problème 1 Vers une formule de Stirling améliorée

Partie I – Polynômes de Bernoulli

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$ et $\varphi : P \mapsto \left(\Delta(P), \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x\right)$

1. a) Montrer que les applications Δ et φ sont linéaires.
   b) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer le degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.
   c) Prouver que φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$.
   On pourra considérer la restriction de φ *à* $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ *pour* $k \in \mathbb{N}$.
   Il en résulte l'existence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, d'un unique polynôme $B_p \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel :
   $$B_p(X+1) - B_p(X) = pX^{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_p(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
   B_p est appelé p-ième polynôme de Bernoulli. On pose en outre $B_0 = 1$.
   d) Calculer B_1 et B_2.
2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $\beta_p = B_p(0)$, appelé p-ième nombre de Bernoulli.
   a) Montrer que pour tout $p \geqslant 2$, $B_p(1) = \beta_p$.
   b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B'_{p+1} = (p+1)B_p$.
   c) En déduire, grâce à la formule de Taylor, que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \beta_{p-k} X^k$.
   d) En déduire que pour tout $p \geqslant 2$, $\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} \beta_k = 0$ puis que les nombres des Bernoulli sont tous rationnels.
   e) Calculer β_p pour $p \in [\![0,4]\!]$.
   f) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B_p(1-X) = (-1)^p B_p(X)$. Qu'en déduire ?
3. On note, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{B}_p$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto B_p(x - \lfloor x \rfloor)$.
   Montrer que $\tilde{B}_p$ est 1-périodique et continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $p \geqslant 2$. Qu'en est-il de $\tilde{B}_1$?

Partie II – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$:
   $$f(1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\beta_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(1) - f^{(p-1)}(0)\right) + (-1)^{r+1} \int_0^1 \frac{B_r(x)}{r!} f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x$$
2. En déduire que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$:
   $$f(k+1) = \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\beta_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(k+1) - f^{(p-1)}(k)\right) + (-1)^{r+1} \int_k^{k+1} \frac{\tilde{B}_r(x)}{r!} f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x$$
3. En déduire que pour tous $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{p=1}^{r} (-1)^p \frac{\beta_p}{p!} \left(f^{(p-1)}(n) - f^{(p-1)}(0)\right) + (-1)^{r+1} \int_0^n \frac{\tilde{B}_r(x)}{r!} f^{(r)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Partie III – Détour par les intégrales généralisées

Soit $u \in \mathscr{C}([1,+\infty[, \mathbb{R})$. On suppose que la fonction $t \mapsto \int_1^t |u(x)|\,\mathrm{d}x$ est majorée sur $[1,+\infty[$.

1. Montrer que la limite $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t u(x)\,\mathrm{d}x$ existe et est finie pour tout $a \geqslant 1$. On la note $\int_a^{+\infty} u(x)\,\mathrm{d}x$.
   On pourra exploiter l'encadrement $0 \leqslant u + |u| \leqslant 2|u|$.
2. Montrer que pour tous $a, b \geqslant 1$, $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} u(x)\,\mathrm{d}x - \int_b^{+\infty} u(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie IV – Prolongement de l'équivalent de Stirling

1. Montrer que pour tous $r \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \left(1 - \sum_{p=2}^{r}\frac{\beta_p}{p(p-1)}\right) + \sum_{p=2}^{r}\frac{\beta_p}{p(p-1)n^{p-1}} + \frac{1}{r}\int_1^n \frac{\tilde{B}_r(x)}{x^r}\,\mathrm{d}x$$

2. a) Montrer que la fonction $t \mapsto \int_1^t \frac{|\tilde{B}_r(x)|}{x^r}\,\mathrm{d}x$ est majorée sur $[1, +\infty[$ pour tout $r \geqslant 2$.
   b) Montrer que pour tout $r \geqslant 2$, $\int_n^{+\infty} \frac{\tilde{B}_r(x)}{x^r}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$.
3. a) Déduire des résultats précédents que pour tous $r \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel A_r indépendant de n pour lequel :

$$\ln(n!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + A_r + \sum_{p=2}^{r-1}\frac{\beta_p}{p(p-1)n^{p-1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)$$

   b) Montrer, au moyen de la formule de Stirling, que pour tout $r \geqslant 2$, $A_r = \ln(\sqrt{2\pi})$.
   c) Déterminer un développement asymptotique de $\ln(n!)$ lorsque $n \to +\infty$ à la précision $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   d) En déduire le développement asymptotique suivant :

$$n! \underset{n\to+\infty}{=} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Problème 2 Un théorème de Schur

Dans ce problème, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ et $\mathscr{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ dont tous les éléments commutent. On souhaite établir un résultat démontré par Schur en 1905 :

$$\dim(\mathscr{F}) \leqslant \frac{n^2}{4} + 1$$

Partie I – Un exemple optimal

1. Dans cette question, on suppose que $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.
   On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des matrices de la forme $\begin{bmatrix} \lambda I_p & M \\ 0 & \lambda I_p \end{bmatrix}$, où λ décrit $\mathbb{C}$ et M décrit $\mathscr{M}_p(\mathbb{C})$.
   a) Montrer que $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont tous les éléments commutent.
   b) Montrer que $\dim(\mathscr{F}) = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$.
2. Proposer un exemple analogue dans le cas où n est impair.

Partie II – Produit d'endomorphismes nilpotents

Soient $u_1, \ldots, u_n \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes nilpotents qui commutent.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, $\mathrm{Ker}(u) \neq \{0_E\}$.
2. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose $u_{k+1} \circ \cdots \circ u_n \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   a) Montrer que $\mathrm{Im}(u_{k+1} \circ \cdots \circ u_n)$ est stable par u_k.
   b) En déduire que $\mathrm{Ker}(u_{k|\mathrm{Im}(u_{k+1}\circ\cdots\circ u_n)}) \neq \{0_E\}$ puis que $\mathrm{rg}(u_{k+1} \circ \cdots \circ u_n) \geqslant \mathrm{rg}(u_k \circ \cdots \circ u_n) + 1$.
3. En déduire l'égalité $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Partie III – Une certaine décomposition

Dans toute cette partie, f désigne un endomorphisme quelconque de E.

1. a) À l'aide d'un argument de dimension, justifier l'existence de $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant tel que $P(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   b) En déduire l'existence d'une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ de P de multiplicité m pour laquelle $\operatorname{Ker}\left((f-\lambda \mathrm{id}_E)^m\right) \neq \{0_E\}$.
2. Soit Q le polynôme défini par la relation $P = (X-\lambda)^m Q$.
   Montrer les inclusions $\operatorname{Im}\left(Q(f)\right) \subset \operatorname{Ker}\left((f-\lambda \mathrm{id}_E)^m\right)$ et $\operatorname{Im}\left((f-\lambda \mathrm{id}_E)^m\right) \subset \operatorname{Ker}\left(Q(f)\right)$.
3. a) Établir l'existence de deux polynômes $U, V \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X-\lambda)^m U + QV = 1$.
   b) En déduire que $E = \operatorname{Ker}\left((f-\lambda \mathrm{id}_E)^m\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(Q(f)\right)$.

Partie IV – Preuve du théorème de Schur

On démontre ici le théorème de Schur par récurrence sur n, dont on rappelle qu'il désigne la dimension de E.

1. Montrer le théorème de Schur en dimension 1.

Soit $n \geqslant 2$. On suppose le théorème de Schur vrai en dimension k, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Soit $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de $\mathscr{F}$, sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ dont tous les éléments commutent.

2. On suppose ici qu'il existe deux sous-espaces vectoriels F et G de E, non réduits à $\{0_E\}$ et stables par $f_1, \ldots, f_r$, pour lesquels $E = F \oplus G$. On pose alors $\mathscr{F}_F = \operatorname{Vect}\left(f_{1|F}, \ldots, f_{r|F}\right)$ et $\mathscr{F}_G = \operatorname{Vect}\left(f_{1|G}, \ldots, f_{r|G}\right)$.
   Montrer que l'application $f \longmapsto \left(f_{|F}, f_{|G}\right)$ est linéaire de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}_F \times \mathscr{F}_G$ et injective.
   Conclure, en comparant les dimensions de $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_F$ et $\mathscr{F}_G$.
3. On suppose désormais que E ne peut pas être décomposé sous la forme $E = F \oplus G$ de la question **2**.
   Soit $i \in [\![1, r]\!]$. D'après la partie **III**, il existe un nombre $\lambda_i \in \mathbb{C}$, un entier $m_i \in \mathbb{N}^*$ et un polynôme $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $\operatorname{Ker}\left((f_i-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\right) \neq \{0_E\}$ et $E = \operatorname{Ker}\left((f_i-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\right) \oplus \operatorname{Ker}\left(Q(f_i)\right)$.
   a) Montrer que $\operatorname{Ker}\left((f_i-\lambda_i \mathrm{id}_E)^{m_i}\right)$ et $\operatorname{Ker}\left(Q(f_i)\right)$ sont stables par $f_1, \ldots, f_r$.
   b) Montrer que $\left(f_i-\lambda_i \mathrm{id}_E\right)^{m_i} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. L'endomorphisme $f_i - \lambda_i \mathrm{id}_E$, que l'on notera b_i, est ainsi nilpotent.
   c) On pose $\mathscr{B} = \operatorname{Vect}(b_1, \ldots, b_r)$. Rappeler pourquoi les éléments de $\mathscr{B}$ sont nilpotents et commutent.
   d) On pose $I = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \operatorname{Im}(b_i)$ et on note S un supplémentaire quelconque de I dans E.
   Vérifier que pour tout $f \in \mathscr{B}$, $f_{|S}$ est à valeurs dans I.
   On note alors ϕ l'application linéaire $f \longmapsto f_{|S}$ de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}(S, I)$.
   e) Soit $f \in \operatorname{Ker}\phi$. Montrer pa récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{Im}(f) \subset \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant r} \operatorname{Im}(b_{i_1} \circ \ldots \circ b_{i_k} \circ f)$.
   En déduire que $f = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
   f) En déduire enfin que $\dim(\mathscr{B}) \leqslant p(n-p)$ où $p = \dim(I)$ puis conclure, en comparant $\mathscr{F}$ et $\mathscr{B}$.

Problème 3 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et loi de l'arcsinus

Partie I – La formule de Wallis

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\rho_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2^{4n+1}} \dbinom{2n}{n}^2$.

1. a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \times a_n$ et en déduire que $\rho_n = \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$.
   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}} \leqslant \dfrac{1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$, puis $\dfrac{1}{2^{2n}} \dbinom{2n}{n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.

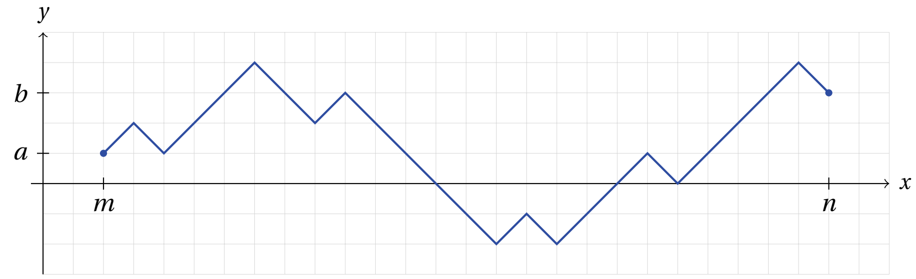
Partie II – Retours à l'origine

Initialement placée en 0, une particule se déplace sur $\mathbb{Z}$ par sauts successifs d'une unité vers la gauche ou vers la droite. Pour modéliser sa trajectoire, on se donne une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé suivant toutes la loi *de Rademacher*, c'est-à-dire telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$. On pose alors $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. a) Montrer que $(S_n + n)/2$ suit une loi binomiale pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   Quelle est la loi de la famille $(X_m, \ldots, X_n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $m \leqslant n$?

b) Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$, que peut-on dire de l'événement $\{S_n = k\}$ si n et k n'ont pas la même parité ? Déterminer un équivalent simple de $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On peut représenter la trajectoire de la particule dans le plan en prenant l'axe des abscisses pour axe des temps. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ vérifiant $m \leqslant n$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on appellera *chemin de* (m, a) *à* (n, b) toute famille de points $(m, y_m), (m+1, y_{m+1}), \ldots, (n, y_n)$ pour laquelle $y_m = a$, $y_n = b$ et pour tout $k \in [\![m, n-1]\!]$: $y_{k+1} = y_k \pm 1$.



Exemple de trajectoire

2. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $m \leqslant n$ et $a, b \in \mathbb{Z}$. On note $C_{(m,a)}^{(n,b)}$ le nombre total de chemins de (m, a) à (n, b) que la particule peut emprunter. Montrer que $C_{(m,a)}^{(n,b)} = \binom{n-m}{\frac{n-m+a-b}{2}}$.

3. a) Montrer que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, il existe autant de chemins de $(1, 1)$ à $(2n, 2k)$ qui touchent l'axe des abscisses que de chemins de $(1, -1)$ à $(2n, 2k)$.

   b) Combien existe-t-il pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$ de chemins de $(0, 0)$ à $(2n, 2k)$ ne touchant pas l'axe des abscisses après $(0, 0)$? En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} > 0) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) = \mathbf{P}(S_{2n} = 0)$.
   On pourra s'intéresser aux variables aléatoires $-X_1, \ldots, -X_{2n}$.

4. a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$, les familles $(X_{2k+1}, X_{2k+1} + X_{2k+2}, \ldots, X_{2k+1} + \cdots + X_{2n})$ et $(S_1, \ldots, S_{2n-2k})$ ont même loi.

   b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\mathbf{P}\left(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0\right) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) \cdot \mathbf{P}(S_{2n-2k} = 0)$$

Partie III – Loi de l'arcsinus (partie facultative mais intéressante)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose à présent $T_n = \max\left\{k \in [\![1, n]\!] \,|\, S_k = 0\right\}$ et on fixe deux réels $a, b \in]0, 1[$ vérifiant $a < b$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in]a, b]\right) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{na < k \leqslant nb} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}$.

2. a) Montrer que pour tous $x > 0$ et $y \geqslant 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+y}} \leqslant \frac{y}{2x\sqrt{x}}$.

   b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} - \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right| \leqslant \frac{1}{4n\sqrt{n}}$ puis que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\left|\frac{1}{2^{2n}}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} - \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \frac{n}{4\sqrt{\pi}\,(k(n-k))^{\frac{3}{2}}}$$

   c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in]a, b]\right) - \frac{1}{\pi} \sum_{na < k \leqslant nb} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}\right| \leqslant \frac{n}{4\sqrt{\pi}} \sum_{na < k \leqslant nb} \frac{1}{(k(n-k))^{\frac{3}{2}}}$$

3. Soit $f \in \mathscr{C}^1(]0, 1[, \mathbb{R})$. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{na < k \leqslant nb} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   On pourra pour cela écrire la somme à l'aide de l'indicatrice $\mathbb{1}_{]a,b]}$ *et on observera que* $0 < na < nb < n$.

4. a) Déduire des résultats précédents que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in]a, b]\right) = \frac{2}{\pi}\left(\arcsin\sqrt{b} - \arcsin\sqrt{a}\right)$.

   b) Estimer la probabilité que la particule ne revienne jamais en 0 entre les instants n et $2n$ pour de grandes valeurs de n. *On admettra que la loi de l'arcsinus est encore vraie pour* $a = 0$ *et* $b = 1$.