

Calcul asymptotique

ENTRAÎNEMENT 1

⚠ Attention !

Sur les calculs de limites

1. Vérifier qu'on a bien une forme indéterminée avant de se lancer dans des calculs compliqués !
2. Toujours se ramener à des limites connues. (équivalents classiques, croissance comparée, etc.)
3. Lorsque l'on calcule une limite en un point a différent de 0 ou $\pm\infty$, penser à faire un changement de variables. ($X = x - a$ ou $X = 1/x$ par exemple)
4. Repérer les limites qui sont des limites de taux d'accroissement.
5. Les équivalents, DL et limites classiques sont à connaître par cœur et à savoir redémontrer en 30 secondes.
6. Penser à mettre des $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$ et $x \rightarrow x_0^\times$ au niveau de l'opérateur \lim si votre fonction est définie sur $]x_0, a]$, $[a, x_0[$ ou sur $I \setminus \{x_0\}$.

♣ Exercice 1 — Étudier les limites suivantes.

1. $\frac{\sin(x^2)}{\tan^2(x)}$ en 0 ;
2. $\frac{2e^{3x} - 5e^x + 1}{3e^{2x} - 7e^{3x}}$ en $-\infty$;
3. $\frac{\ln(x^2 + 2)}{3x^2 + 4x + 5}$ en $+\infty$;
4. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ en 0^+ ;
5. $\frac{1 + \sin(x) + \cos(x)}{\cos(x) - \sin(x) - 1}$ en $-\frac{\pi}{2}$;
6. $(\tan x)^{\cos x}$ en $\frac{\pi^-}{2}$.

Indication — Pour la cinquième limite, on pourra effectuer le changement de variable $X = x + \frac{\pi}{2}$.

Correction — 1, $+\infty$, 0, 1, 1, 1.

♣ Exercice 2 — Déterminer un équivalent simple des expressions suivantes au point considéré.

- (a) $\frac{\sqrt{x+2}-1}{\tan(x+1)}$ en -1 ; (b) $\frac{e^x}{1-x^2}$ en 1 ;
- (c) $\frac{(e^x - e^5)^2}{\sqrt[3]{x+3}-2}$ en 5 ; (d) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$ en $+\infty$;
- (e) $2x + \sqrt{4x^2 + 3x + 2}$ en $+\infty$;
- (f) $\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$ en 0 ; (g) $\frac{1 - \cos(7x) + \sin(5x)}{\sin(x) \tan(3x) \cos(9x)}$ en 0 ;

Correction — $\frac{1}{2}$, $\frac{e}{2(1-x)}$, $12e^{10}(x-5)$, e^2 , $4x$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3x}$.

♣ Exercice 3 — Déterminer les développements limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $3 \sin(2x) - 2 \sin(3x)$;
2. $DL_3(0)$ de $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$;
3. $DL_4(0)$ de $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$;
4. $DL_4(0)$ de $(1 + \sin x)^x$;
5. $DL_2(1)$ de $\frac{1 + \sin(x-1)}{1 + \ln(x)}$;
6. $DL_5(0)$ de $\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;
7. $DL_2(1)$ de $\frac{\ln x}{x^2}$.

Correction —

$$5x^3 - \frac{13}{4}x^5 + o(x^5) ; \quad x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o(x^3) ;$$

$$-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + o(x^4) ; \quad 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) ;$$

$$1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2) ; \quad \frac{\pi}{4} - x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + o(x^5) ;$$

$$(x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$