Variables aléatoires discrètes

Entraînement 11

♣ Exercice 1 — Préciser la loi de chaque variable aléatoire décrite ci-dessous.

1. nombre de filles dans les familles de 6 enfants, sachant que la probabilité de naissance d'une fille est 0,51 ;
2. nombre annuel d'accidents à un carrefour donné, sachant qu'il y a chaque jour une chance sur 125 d'accident ;
3. nombre de fois qu'il faut lancer un dé pour obtenir un double six ;
4. nombre de personnes présentant une maladie donnée à une consultation dans un hôpital ;
5. nombre de voix d'un des candidats à une élection présidentielle lors du dépouillement des 100 premiers bulletins dans un bureau de vote ;

Correction —

$$X \sim \mathscr{B}(6;0{,}51)\,; \quad X \sim \mathscr{B}(365;1/125)\,; \quad X \sim \mathscr{G}(1/12)\,;$$
$$X \sim \mathscr{B}(N,p)\,; \quad X \sim \mathscr{B}(100,p)$$

♣♣ Exercice 2 —

1. Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$,
$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} x^{k-n} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$
2. Une première pièce fait *pile* avec la probabilité p, une seconde avec la probabilité $q = 1-p$. On lance la première pièce jusqu'à obtenir le premier *pile* ; on note X le nombre de lancers. On lance X fois la seconde pièce, et on note Y le nombre de *pile*.
   (a) Calculer $\mathbf{P}(Y=0)$.
   (b) Donner la loi de Y et vérifier que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n) = 1$$
   (c) Calculer $\mathbf{E}(Y)$.

Correction —

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$. Par dérivation terme à terme n fois,
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}$$

2. (a) $X \sim \mathscr{G}(p)$ et d'après la formule des proba. totales,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=0) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=0|X=k)\cdot\mathbf{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^k \cdot q^{k-1} p = \frac{p^2}{1-pq}\end{aligned}$$
   (b) $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y=n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y=n|X=k)\cdot\mathbf{P}(X=k)\\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k}{n} q^n p^{k-n}\cdot q^{k-1}p = \frac{p}{q^3}\cdot\left(\frac{q^2}{1-pq}\right)^{n+1}\end{aligned}$$
   (c) Comme pour $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, Y est d'espérance finie et on trouve $\mathbf{E}(Y) = \dfrac{q}{p}$.

♣♣ Exercice 3 —

1. Montrer que pour tout entier n,
$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}$$
2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires, i.e. le rang du tirage de la dernière boule noire.
   Déterminer la loi de X ainsi que son espérance.

Correction —

1. Par récurrence, ou, plus astucieusement par télescopage,
$$\begin{aligned}\sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} &= \sum_{p=n}^{2n} \left[\binom{p+1}{n+1} - \binom{p}{n+1}\right]\\ &= \binom{2n+1}{n+1} - \binom{n}{n+1} = \binom{2n+1}{n+1}\end{aligned}$$
2. • On a $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$.
   • Le résultat des tirages successifs peut être représenté par un mot de $2n$ lettres, avec n lettres N et n lettres B. Il y en a exactement $\dbinom{2n}{n}$: c'est le nombre de choix possibles pour positionner les lettres N par exemple. Par ailleurs, l'événement $(X = p)$, pour $p \in [\![n, 2n]\!]$, sera réalisé si et seulement la $p^{\text{ème}}$ lettre est N et qu'on

a placé les $n-1$ autres lettres N avant, parmi les $p-1$ positions possibles.

Ainsi, pour tout $p \in [\![n, 2n]\!]$, $\mathbf{P}(X = p) = \dfrac{\binom{p-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

- Il suffit alors d'utiliser la question précédente pour calculer l'espérance :

$$\mathbf{E}(X) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} p\binom{p-1}{n-1} = \frac{n}{\binom{2n}{n}} \sum_{p=n}^{2n} \binom{p}{n} = \frac{n(2n+1)}{n+1}$$

♣♣ Exercice 4 — Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbf{P}(X = n) = \frac{n}{2^{n+1}}$$

On admet que $\mathbf{V}(X) = 4$.
Une urne contient X boules numérotées de 1 à X. On effectue un tirage, au hasard, d'une boule, et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Quelle loi suit Y ? Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Quel est leur coefficient de corrélation linéaire ?

Correction —

1. $(X, Y)(\Omega) = (\mathbb{N}^*)^2$. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = n, Y = k) &= \mathbf{P}(Y = k | X = n) \cdot \mathbf{P}(X = n) \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n+1}} \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ si } k > n \end{cases}\end{aligned}$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbf{P}(X = n, Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^k}$$

Ainsi, $Y \sim \mathscr{G}(1/2)$. Il n'y a pas indépendance :

$$\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = 0 \neq \mathbf{P}(X = 2) \times \mathbf{P}(Y = 3)$$

3. $\rho(X, Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$. $\sigma(X) = 2$ et $\sigma(Y) = \sqrt{2}$.

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

On remarque que $2\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y^2) = 6$ et :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} nk\mathbf{P}(X = n, Y = k) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{nk}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(n+1)}{2^{n+2}} = \frac{\mathbf{E}(X^2) + \mathbf{E}(X)}{2}\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{E}(XY) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{V}(X) + \mathbf{E}(X)^2 + \mathbf{E}(X)) = 8$.

Ainsi, $\operatorname{cov}(X, Y) = 2$ et $\rho(X, Y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

♣♣ Exercice 5 — *Inégalité de Cantelli*

1. Soit Y une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 vérifiant $\mathbf{E}(Y) \geqslant 0$ et $\mathbf{E}(Y^2) > 0$. Montrer à l'aide de $Z = \mathbb{1}_{[Y>0]}$ que :

$$\mathbf{P}(Y > 0) \geqslant \frac{\mathbf{E}(Y)^2}{\mathbf{E}(Y^2)}$$

2. En déduire que pour toute variable aléatoire réelle X et pour tout réel $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) < \varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$$

puis que $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$.

Indication — 1. On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à Y et Z.

Correction —

1. Y et Z admettant toutes deux un moment d'ordre 2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\mathbf{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(Z^2)$$

$$\mathbf{E}(YZ) = \sum_{y>0} y\mathbf{P}(Y = y) \geqslant \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{E}(Y) \text{ et}$$

$$\mathbf{E}(Z^2) = \sum_{y>0} \mathbf{P}(Y = y) = \mathbf{P}(Y > 0)$$

$\mathbf{E}(Y) \geqslant 0$ donc $\mathbf{E}(Y)^2 \leqslant \mathbf{E}(YZ)^2 \leqslant \mathbf{E}(Y^2) \cdot \mathbf{P}(Y > 0)$.

2. Posons $Y = \varepsilon - (X - \mathbf{E}(X))$. $\mathbf{E}(Y) = \varepsilon \geqslant 0$ et,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y^2) &= \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\mathbf{E}(X - \mathbf{E}(X)) \\ &= \mathbf{V}(X) + \varepsilon^2 > 0\end{aligned}$$

L'inégalité précédente donne alors :

$$\mathbf{P}(Y > 0) = \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) < \varepsilon) \geqslant \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$$

De plus,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geqslant \varepsilon) &= 1 - \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) < \varepsilon) \\ &\leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2} = \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}\end{aligned}$$

L'inégalité précédente est valable pour $-X$. Ainsi, par σ-additivité,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) &= \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geqslant \varepsilon) + \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \leqslant -\varepsilon) \\ &\leqslant \frac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2} + \frac{\mathbf{V}(-X)}{\mathbf{V}(-X) + \varepsilon^2} = \frac{2\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}\end{aligned}$$