Espaces préhilbertiens réels

ENTRAÎNEMENT 12

Attention !

Sur les espaces préhilbertiens réels

1. Pour démontrer une inégalité, penser à utiliser l'inégalité triangulaire ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Un dessin aide à comprendre une projection et permet d'intuiter une preuve.
3. Ne pas confondre vecteurs et coordonnées de vecteurs.

♣ Exercice 1 —

1. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(|a_1| + \dots + |a_n|) \leqslant \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$$

2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Correction —

1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (1, \dots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
2. Il y a égalité lorsque $a_1 = \cdots = a_n$.

♣ Exercice 2 — Pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose :

$$(P|Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Correction —

1. Si $(P|P) = 0$ alors -1, 0 et 1 sont racines de P, polynôme de degré *au plus 2*, donc $P = \tilde{0}$.
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)\right)$.

♣ Exercice 3 — Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit pour deux polynômes $(P, Q) \in E^2$,

$$(P|Q) = \int_0^1 tP(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Vérifier que c'est un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormée de $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Déterminer le projeté orthogonal du polynôme $P = X^3$ sur F.

Correction —

1. Classique !
2. $\left(\sqrt{2}, 6X - 4, 10\sqrt{6}\left(X^2 + \frac{3}{10} - \frac{6}{5}X\right)\right)$.
3. $\pi(X^3, F) = \frac{4}{35} - \frac{6}{7}X + \frac{12}{7}X^2$.

♣ Exercice 4 — Soient E un espace préhilbertien réel et a un vecteur non nul de E. On pose $D = \mathrm{Vect}(a)$ et $H = D^\perp$.
Exprimer $d(x, D)$ et $d(x, H)$ en fonction de $||x||$ et $(x|a)$, pour $x \in E$.

Indication — On commencera par trouver λ tel que $x = \lambda a + p(x)$ où p représente la projection orthogonale sur H.

Correction — Soit $x \in E$.

- $x = \lambda a + u$ avec $u \in H$. $(u|a) = 0$ donc $\lambda = \frac{(x|a)}{||a||^2}$.
- $d(x, H) = ||x - u|| = \frac{|(x|a)|}{||a||}$.
- $d(x, D) = ||u|| = ||x - \lambda a||$ avec, d'après Pythagore :

$$||u||^2 = ||x||^2 - \frac{(x|a)^2}{||a||^2}$$

♣ Exercice 5 — Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec :

$$v_1 = (0, 3, 1, -1) \text{ et } v_2 = (1, 2, -1, 1).$$

1. Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormée de $F^\perp$.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Indication — $u \in F^\perp \iff (u|v_1) = (u|v_2) = 0$.

Correction —

1. $u(x, y, z, t) \in F^\perp \iff \begin{cases} 3y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$

   On a donc

$$u \in F^\perp \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $F^{\perp} = \mathrm{Vect}((0,0,1,1),(-5,1,0,3))$.
Remarque : *On aurait pu trouver d'autres vecteurs. Si c'est le cas, on vérifiera qu'ils sont bien orthogonaux à v_1 et v_2. L'espace est de dimension 2, on retrouve le fait que* $\dim F^{\perp} = 4-2$.
Il reste à orthonormaliser cette base en utilisant la méthode de Gram-Schmidt.
Après calculs, $F^{\perp} = \mathrm{Vect}\left(v_3, v_4\right)$ où :

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, v_4 = \frac{1}{\sqrt{122}}\begin{pmatrix}-10\\2\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

2. En notant p la projection orthogonale sur F, on a :

$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - (u|v_3)v_3 - (u|v_4)v_4$$

Il ne reste plus qu'à déterminer les images des vecteurs de la base canonique. On obtient :

$$\frac{1}{61}\begin{pmatrix}11 & 10 & -15 & 15\\10 & 59 & 3 & -3\\-15 & 3 & 26 & -26\\15 & -3 & -26 & 26\end{pmatrix}$$

La trace est bien égale à 2 ! *Pourquoi ?!*

♣♣ **Exercice 6 —** Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $f(0) = 0$. Montrer que :

$$f^2(x) \leqslant x \int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Indication — Distinguer les cas $x \geqslant 0$, $x < 0$ et penser à Cauchy-Schwarz.

Correction — On munit $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(f|g) = \int_0^x fg$ si $x \geqslant 0$ et $(f|g) = -\int_0^x fg$ si $x < 0$.
Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f' et $g : x \mapsto 1$.