Espaces préhilbertiens réels

Entraînement 14

♣ Exercice 1 —

1. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout n-uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,
$$\frac{1}{\sqrt{n}}(|a_1| + \cdots + |a_n|) \leqslant \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$
2. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Correction —

1. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $a = (|a_1|, \dots, |a_n|)$ et $b = (1, \dots, 1)$ de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
2. Il y a égalité si, et seulement si, $a_1 = \cdots = a_n$.

♣ Exercice 2 — Pour $P, Q \in E = \mathbb{R}_2[X]$, on pose :
$$(P|Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$
Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire et déterminer une base orthonormée pour ce produit scalaire. Calculer enfin $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])$.

Correction —

1. Si $(P|P) = 0$ alors -1, 0 et 1 sont racines de P, polynôme de degré *au plus 2*, donc $P = \tilde{0}$.
2. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{2}{3}\right)\right)$ par orthonormalisation.
3. $d(X^2, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - p(X^2)\| = (X^2|P_3)P_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

♣ Exercice 3 — Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec :
$$v_1 = (0, 3, 1, -1) \quad \text{et} \quad v_2 = (1, 2, -1, 1).$$

1. Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormée (v_3, v_4) de $F^\perp$.
2. Exprimer à l'aide de v_3 et v_4 la matrice dans la base canonique de la proj. orthogonale sur F.

Correction —

1. $u \in F^\perp \iff \begin{cases} 3y + z - t = 0 \\ x + 2y - z + t = 0 \end{cases}$ puis,
$$u \in F^\perp \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}((0,0,1,1), (-5,1,0,3))$. Il reste à orthonormaliser cette base via la méthode de Gram-Schmidt. Après calculs, $F^\perp = \mathrm{Vect}\left(v_3, v_4\right)$ où :
$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1) \quad \text{et} \quad v_4 = \frac{1}{\sqrt{122}}(-10, 2, -3, 3)$$
2. En notant p la projection orthogonale sur F,
$$\forall u \in E, \quad p(u) = u - (u|v_3)v_3 - (u|v_4)v_4$$
On obtient la matrice $I_4 - V_3 V_3^\top - V_4 V_4^\top$.

♣ Exercice 4 — Soient E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que $\overline{F}^\perp = F^\perp$.

Correction — $F \subset \overline{F}$ donc $\overline{F}^\perp \subset F^\perp$. Soit maintenant $x \in F^\perp$. Montrons que pour tout $y \in \overline{F}$, $(x|y) = 0$. Pour cela, considérons $y \in \overline{F}$ et une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F convergeant vers y.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (x|y_n) = 0 \text{ car } y_n \in F$$
Il ne reste plus qu'à passer à la limite, par continuité du produit scalaire, pour obtenir $(x|y) = 0$. Le produit scalaire est bien continu, en tant que forme bilinéaire vérifiant :
$$\forall a, b \in E, \quad |(a|b)| \leqslant \|a\| \cdot \|b\|$$

♣♣ Exercice 5 — Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ vérifiant la condition $f(0) = 0$. Montrer que :
$$f^2(x) \leqslant x \int_0^x f'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Indication — Distinguer les cas $x \geqslant 0$, $x < 0$ et penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Correction — On munit $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ du produit scalaire :
$$(f|g) = \int_0^x fg \text{ si } x \geqslant 0 \text{ et } (f|g) = -\int_0^x fg \text{ si } x < 0$$
On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f' et $x \mapsto 1$.

♣♣ Exercice 6 — *Polynômes de Legendre*
On munit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $P_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}$, où $U_n = (X-1)^n (X+1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
2. Montrer que $\deg(P_n) = n$.
3. Prouver que $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

Indications — 1. Utiliser la formule de Taylor. 3. Effectuer n intégrations par parties.

Correction —

1. $P_n = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k$.
   D'où $P_n(1)=1$ et $P_n(-1)=(-1)^n$.
2. $\deg(U_n)=2n$ donc $\deg(P_n)=n$. Soit $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On effectue une intégration par parties généralisées :
$$(P_n|Q)=(-1)^n\int_0^1 U_n(t)Q^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t=0$$
   car 1 et -1 sont racines de U_n d'ordre n. $P_n\in\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.

♣♣ Exercice 7 — On cherche à calculer pour $n\in\mathbb{N}^*$:
$$\delta_n=\inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n}\int_0^1(1+\alpha_1 t+\cdots+\alpha_n t^n)^2\,\mathrm{d}t$$
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par :
$$\forall P,Q\in\mathbb{R}[X],\quad (P|Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$
On note P_n le projeté $\perp$ de 1 sur $F=\mathrm{Vect}(X,\dots,X^n)$.
On écrit $P_n=-\displaystyle\sum_{k=1}^n\beta_k X^k$, où $(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que :
$$\delta_n=\int_0^1(1+\beta_1 t+\cdots+\beta_n t^n)^2\,\mathrm{d}t$$
2. On pose $R(X)=\dfrac{1}{X+1}+\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{\beta_k}{X+k+1}$.
   Au moyen de $(1-P_n|X^i)$, montrer que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $R(k)=0$. En déduire $R(0)$.
3. Exprimer δ_n en fonction de n.

Indication — 2. R peut s'écrire sous la forme P/Q avec $P=\lambda(X-1)\cdots(X-n)$. Évaluer $(X+1)R$ en -1 pour déterminer la valeur de λ, donc de $R(0)$.

Correction —

1. $P_n\in F=\mathrm{Vect}(X,\dots,X^n)$ donc il existe un unique n-uplet $(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $P_n=-\displaystyle\sum_{k=1}^n\beta_k X^k$. De plus,
$$\delta_n=\inf_{P\in F}\|1-P\|^2=d(1,F)^2=\|1-P_n\|^2$$
2. $1-P_n\in F^\perp$ donc pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $(1-P_n|X^i)=0$.
   Donc $(1-P_n|X^i)=\displaystyle\int_0^1\left(t^i+\sum_{k=1}^n\beta_k t^{i+k}\right)\mathrm{d}t=R(i)=0$.
   $R=P/Q$ où $Q=(X+1)\cdots(X+n+1)$ et $\deg(P)\leqslant n$.
   De ce qui précède, $P=\lambda(X-1)\cdots(X-n)$. $(X+1)R$ évalué en -1 donne $\lambda=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. D'où $R(0)=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
3. $\delta_n=\|1-P_n\|^2=(1-P_n|1-P_n)=(1-P_n|1)=R(0)$ puisque $1-P_n\perp P_n\in F$ donc $\delta_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}$.

♣♣♣ Exercice 8 — *Déterminant de Gram*
Soit E un espace préhilbertien réel.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, on note :
$$A=((x_i|x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\text{ et }G(x_1,\dots,x_n)=\det(A)$$

1. On suppose E de dimension n.
   (a) Exprimer A en fonction de la matrice M des coordonnées de la famille $(x_1,\dots,x_n)$ dans une base orthonormale de E.
   (b) Montrer que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
2. Montrer que la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est liée ssi $G(x_1,\dots,x_n)=0$. Montrer qu'elle est libre ssi $G(x_1,\dots,x_n)>0$.
3. On suppose $(x_1,\dots,x_n)$ libre et on note F le sous-espace vectoriel engendré. Montrer que :
$$\forall x\in E,\quad d^2(x,F)=\frac{G(x,x_1,\dots,x_n)}{G(x_1,\dots,x_n)}$$
4. Démontrer par récurrence l'inégalité d'Hadamard :
$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\ G(x_1,\dots,x_n)\leqslant\|x_1\|^2\cdots\|x_n\|^2$$
   Étudier le cas d'égalité.

Indications —

1. On introduira $M=((x_j|e_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et on calculera $M^\top M$. Pour comparer $\mathrm{rg}(M)$ et $\mathrm{rg}(A)$, on comparera les noyaux de $M^\top M$ et de M en calculant $\|MX\|^2$.
3. Écrire $x=x_F+x_{F^\perp}$.

Correction —

1. Soit $M=((x_j|e_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une base orthonormale de E. On vérifie que $A=M^\top M$ en remarquant que $\displaystyle\sum_{k=1}^n(x_i|e_k)(x_j|e_k)=\left(x_i\middle|\sum_{k=1}^n(x_j|e_k)e_k\right)=(x_i|x_j)$.
   Il s'agit enfin de montrer que $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(M^\top M)=\mathrm{rg}(M)$. Pour cela, on montre que les noyaux sont égaux, les images auront alors même dimension.
   - Si $MX=0$ alors $M^\top MX=0$ donc $\mathrm{Ker}(M)\subset\mathrm{Ker}(A)$.
   - Si $M^\top MX=0$ alors $X^\top M^\top MX=\|MX\|^2=0$ donc $MX=0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(A)\subset\mathrm{Ker}(M)$.

   Donc $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Ker}(M)$.
   D'où $\mathrm{rg}(A)=n-\dim\mathrm{Ker}(A)=n-\dim\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{rg}(M)$.
2. La famille est liée si et seulement si $\mathrm{rg}(A)=\mathrm{rg}(M)<n$, c'est-à-dire $\det(A)=0$. De plus, notons que $\det(A)=\det(M^\top M)=\det(M)^2\geqslant 0$, d'où la caractérisation de la liberté de la famille.
3. $G(x,x_1,\dots,x_n)=G(x_F,x_1,\dots,x_n)+G(x_{F^\perp},x_1,\dots,x_n)$ par multilinéarité de det. $(x_F,x_1,\dots,x_n)$ étant liée,
$$G(x,x_1,\dots,x_n)=G(x_{F^\perp},x_1,\dots,x_n)$$
   La première colonne de ce déterminant est $\begin{bmatrix}\|x_{F^\perp}\|^2\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

donc en développant par rapport à cette colonne :

$$\begin{aligned} G(x, x_1, \dots, x_n) &= \|x_{F^\perp}\|^2 \cdot G(x_1, \dots, x_n) \\ &= d^2(x, F) \cdot G(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

4. On peut déjà mettre de côté le cas où la famille est liée, le déterminant est alors nul. Travaillons maintenant uniquement avec des familles libres.
L'initialisation de la récurrence s'obtient facilement. En effet, $G(x_1) = \det\big(\big[\|x_1\|^2\big]\big) = \|x_1\|^2$. Supposons le résultat vrai au rang n. Alors :

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &= d^2(x_{n+1}, F) \cdot G(x_1, \dots, x_n) \\ &\leqslant d^2(x_{n+1}, F) \cdot \|x_1\|^2 \times \cdots \times \|x_n\|^2 \end{aligned}$$

où $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. De plus,

$$\|x_{n+1}\|^2 = \|\pi_F(x_{n+1})\|^2 + \|\pi_{F^\perp}(x_{n+1})\|^2$$

Donc $d^2(x_{n+1}, F) = \|\pi_{F^\perp}(x_n)\|^2 \leqslant \|x_{n+1}\|^2$. Au final,

$$G(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \leqslant \|x_1\|^2 \times \cdots \times \|x_n\|^2 \times \|x_{n+1}\|^2$$

Il y a égalité si, et seulement si, la famille est orthogonale.