Endomorphismes d'un espace euclidien

ENTRAÎNEMENT 15

♣ **Exercice 1 —** Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, quelle est la nature de l'application linéaire ayant pour matrice dans la base canonique :

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix};\ B=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8&4&1\\4&7&4\\1&4&-8\end{bmatrix};$$

$$C=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&1&2\\-2&-2&-1\end{bmatrix};\ D=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-\sqrt{2}&0\\-1&0&1\end{bmatrix}$$

Indication — Calculer M^2 ou $M^\top M$.

Correction —

1. $A^2=A$, f est une projection (orthogonale) sur :
$$\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$$
parallèlement à $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}((-1,0,1))$.
2. $B^2=I_3$ donc f est une symétrie. Comme $B\in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est une symétrie orthogonale. C'est en fait un demi-tour d'axe $E_1=\operatorname{Vect}((1,4,1))$.
3. $C^\top C=I_n$ et $\det(C)=1$. Rotation d'axe dirigé par $(-1,1,0)$ et d'angle de mesure $+\arccos(-1/3)$.
4. Composée de la rotation d'axe dirigé par $\operatorname{Vect}(0,1,0)$ et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{4}$ et de la réflexion par rapport à $(\operatorname{Vect}(0,1,0))^\perp$ i.e. par rapport au plan d'équation $y=0$.

♣ **Exercice 2 —** Soit E un espace euclidien et F un s.e.v. de E. On note p_F le projecteur orthogonal sur F. Déterminer la nature des opérateurs suivants :

$$\mathrm{id}_E-p_F\ ;\quad 2p_F-\mathrm{id}_E\ ;\quad \mathrm{id}_E-2p_F$$

Correction — Il s'agit de la projection orthogonale sur $F^\perp$, de la symétrie orthogonale par rapport à F et de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

♣♣ **Exercice 3 —** Soient p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.

1. Montrer que $p\circ q\circ p$ est diagonalisable.
2. (a) Prouver que pour $y\in E$, $\langle q(y)|y\rangle=\|q(y)\|^2$.
   (b) En déduire que $\mathrm{Sp}(p\circ q\circ p)\subset[0,1]$.

Correction —

1. $(p\circ q\circ p)^*=p^*\circ q^*\circ p^*=p\circ q\circ p$ donc $p\circ q\circ p$ est autoadjoint. Le théorème spectral permet de conclure.
2. (a) Soit $y\in E$. Alors, $y=y_1+y_2$ avec $y_1\in\operatorname{Ker}(q)$ et $y_2\in\operatorname{Im}(q)$. Par orthogonalité de $\operatorname{Ker}(q)$ et $\operatorname{Im}(q)$,
$$\langle q(y)|y\rangle=\langle y_2|y_1+y_2\rangle=\|y_2\|^2=\|q(y)\|^2$$
   (b) Soient λ une valeur propre de $r=p\circ q\circ p$ et x un vecteur propre associé.
$$\langle r(x)|x\rangle=\lambda\|x\|^2=\langle q(p(x))|p(x)\rangle=\|q(p(x))\|^2$$
Comme $x\neq 0_E$, on en déduit directement que $\lambda\geqslant 0$. De plus, p,q étant des projecteurs orthogonaux,
$$\|q(p(x))\|\leqslant\|p(x)\|\leqslant\|x\| \text{ et donc, } \lambda\leqslant 1$$

♣♣ **Exercice 4 —** Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base d'un espace euclidien E de dimension $n\geqslant 1$.

1. Soit u l'endomorphisme défini par :
$$\forall x\in E,\quad u(x)=\sum_{i=1}^n\langle x|e_i\rangle e_i$$
Montrer que u est symétrique défini positif.
2. Montrer qu'il existe v autoadjoint tel que $v^2=u^{-1}$.
3. Prouver que la famille $(v(e_1),\dots,v(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Correction —

1. Soient $x,y\in E$. $\langle u(x)|y\rangle=\sum_{i=1}^n\langle x|e_i\rangle\langle y|e_i\rangle$.
Par symétrie en x,y, $\langle u(x)|y\rangle=\langle x|u(y)\rangle$ et $u^*=u$.
$$\forall x\in E,\quad \langle u(x)|x\rangle=\sum_{i=1}^n\langle x|e_i\rangle^2\geqslant 0$$
La somme est nulle lorsque $x\perp e_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire lorsque $x\in\operatorname{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp=E^\perp=\{0\}$. Ainsi, $u\in\mathscr{S}^{++}(E)$.
2. Classique, on peut considérer la matrice :
$\operatorname{diag}\left(1/\sqrt{\lambda_1},\dots,1/\sqrt{\lambda_n}\right)$ avec $\mathrm{Sp}(u)=\{\lambda_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}\subset\mathbb{R}_+^*$
3. Soient $i,j\in[\![1,n]\!]$.
$$\langle v(e_i)|v(e_j)\rangle=\langle e_i|v^2(e_j)\rangle=\langle e_i|u^{-1}(e_j)\rangle=\delta_{i,j}$$
puisque $u(u^{-1}(e_j))=\sum_{i=1}^n\langle u^{-1}(e_j)|e_i\rangle e_i=e_j$.
La famille est orthonormale, de cardinal n : il s'agit bien une base orthonormale de E.

♣♣♣ **Exercice 5 —** Soit (a,b) une famille libre d'un espace euclidien E et $u\in\mathscr{L}(E)$ défini par $u(x)=\langle a|x\rangle b$.

1. Déterminer u^*.
2. Déterminer ses éléments propres de $v=u+u^*$.
3. Calculer $\max\limits_{\|x\|=1}\left\{\langle v(x)|x\rangle\right\}$.

Indication — 2. Diagonaliser $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v_{|\operatorname{Vect}(a,b)})$ où $\mathscr{B}=(a,b)$.

Correction —

1. Soient $x, y \in E$.

$$\langle u(x)|y\rangle = \langle a|x\rangle\langle b|y\rangle = \langle x|\langle b|y\rangle a\rangle$$

Donc $u^*(y) = \langle b|y\rangle a$.

2. On notera que v est autoadjoint donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

$$\forall x \in E, \quad u(x) + u^*(x) = \langle a|x\rangle b + \langle b|x\rangle a$$

Une analyse de l'équation $u(x) = \lambda x$ conduit rapidement à distinguer trois cas : $x \in \mathrm{Vect}(a,b)^\perp$, $x \in \mathrm{Vect}(a+b)$, $x \in \mathrm{Vect}(a-b)$. On peut s'aider de la restriction de $u+u^*$ au sous-espace stable $\mathrm{Vect}(a,b)$ et construire la matrice 2×2 associée, facilement diagonalisable. D'où les trois (pourquoi ?) sous-espaces propres suivants :

- $E_0 = \mathrm{Vect}(a,b)^\perp$;
- $E_{\langle a|b\rangle + \|a\|\|b\|} = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{a}{\|a\|} + \dfrac{b}{\|b\|}\right)$;
- $E_{\langle a|b\rangle - \|a\|\|b\|} = \mathrm{Vect}\left(\dfrac{a}{\|a\|} - \dfrac{b}{\|b\|}\right)$.

3. On retrouve le classique quotient de Rayleigh (cf. TD).

$$\max_{\|x\|=1} \left\{\langle v(x)|x\rangle\right\} = \lambda_{\max} = \langle a|b\rangle + \|a\|\|b\| > 0$$

♣♣♣ Exercice 6 — *Décomposition polaire, bis repetita*
On munit de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que pour tout $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

2. Prouver que lorsque $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$,

$$\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(S\Omega) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$$

3. Établir la réciproque en considérant $\Omega = \exp(tA)$.
4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer la continuité de $X \mapsto \mathrm{Tr}(MX)$ sur $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire qu'il existe $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S\Omega$.

Indication — 3. Dériver la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{Tr}(S\exp(tA))$ et évaluer en 0 pour montrer que $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$. 4. Exploiter la compacité de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et la caractérisation établie en 2. et 3.

Correction —

1. Rappelons que si M et N commutent, $\exp(M)\exp(N) = \exp(M+N)$. De plus, la transposition étant continue (app. linéaire en dimension finie), $\exp(M)^\top = \exp(M^\top)$. D'où,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA)\exp(tA)^\top = \exp(tA)\exp(-tA) = \exp(0) = I_n$$

Ainsi, $\exp(tA) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $S = PDP^\top$ avec $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale, à coefficients positifs ou nuls. Donc pour tout $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, en posant $\Omega' = P^\top \Omega P$,

$$\mathrm{Tr}(S\Omega) = \mathrm{Tr}(PDP^\top\Omega) = \mathrm{Tr}(DP^\top\Omega P) = \mathrm{Tr}(D\Omega')$$

$\Omega' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ses coefficients $\omega'_{i,j}$ vérifient donc $|\omega'_{i,j}| \leqslant 1$. Ainsi, puisque les coefficients λ_k sont tous positifs,

$$\mathrm{Tr}(D\Omega') = \sum_{k=1}^n \lambda_k \omega'_{k,k} \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k = \mathrm{Tr}(D) = \mathrm{Tr}(S)$$

3. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(S\Omega) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}(S\exp(tA)) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$. La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{Tr}(S\exp(tA))$ admet un maximum en $t = 0$. De plus, φ est dérivable et (pour les 3/2, attendre les prochains chapitres) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \mathrm{Tr}(SA\exp(tA))$$

$\varphi'(0) = \mathrm{Tr}(SA) = 0$ donc $S \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
Il reste à montrer que les valeurs propres de S sont positives. Avec les notations précédentes,

$$\forall \Omega' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(D\Omega') \leqslant \mathrm{Tr}(D)$$

soit $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k \omega'_{k,k} \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k$.
Il suffit alors de considérer la matrice $\Omega' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $\omega'_{k,k} = -1$ si $\lambda_k < 0$, $\omega'_{k,k} = 1$ sinon.
D'où $\displaystyle\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leqslant \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et la conclusion : $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$.

4. L'application $X \mapsto \mathrm{Tr}(MX)$ est linéaire (en dim. finie) donc continue sur le compact $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Elle admet un maximum, atteint en mettons $\Omega' \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\forall X \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(MX) \leqslant \mathrm{Tr}(M\Omega')$$

Posons maintenant $S = M\Omega'$. L'inégalité se réécrit :

$$\forall \Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \quad \mathrm{Tr}(S\Omega) \leqslant \mathrm{Tr}(S)$$

D'après ce qui précède, $S \in \mathrm{S}_n^+(\mathbb{R})$. D'où $M = S\Omega'^\top$.