

Endomorphismes d'un espace euclidien

ENTRAÎNEMENT 15

♣ **Exercice 1** — Dans \mathbb{R}^3 muni du produit scalaire usuel, quelle est la nature de l'application linéaire ayant pour matrice dans la base canonique :

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{bmatrix};$$

$$C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}; D = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Indication — Calculer M^2 ou $M^T M$.

Correction —

- $A^2 = A$, f est une projection (orthogonale) sur :

$$\text{Im } f = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0))$$

parallèlement à $\text{Ker } f = \text{Vect}((-1, 0, 1))$.

- $B^2 = I_3$ donc f est une symétrie. Comme $B \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$, c'est en fait un demi-tour d'axe $E_1 = \text{Vect}((1, 4, 1))$.
- $C^T C = I_n$ et $\det(C) = 1$. Rotation d'axe dirigé par $(-1, 1, 0)$ et d'angle de mesure $+\arccos(-1/3)$.
- Composée de la rotation d'axe dirigé par $\text{Vect}(0, 1, 0)$ et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{4}$ et de la réflexion par rapport à $(\text{Vect}(0, 1, 0))^\perp$ i.e. par rapport au plan d'équation $y = 0$.

♣♣ **Exercice 2** — Soit E un espace euclidien et F un s.e.v. de E . On note p_F le projecteur orthogonal sur F . Déterminer la nature des opérateurs suivants :

$$\text{id}_E - p_F; \quad 2p_F - \text{id}_E; \quad \text{id}_E - 2p_F$$

Correction — Il s'agit de la projection orthogonale sur F^\perp , de la symétrie orthogonale par rapport à F et de la symétrie orthogonale par rapport à F^\perp .

♣♣♣ **Exercice 3** — Soient p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E .

- Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
- (a) Prouver que pour $y \in E$, $\langle q(y)|y \rangle = \|q(y)\|^2$.
(b) En déduire que $\text{Sp}(p \circ q \circ p) \subset [0, 1]$.

Correction —

- $(p \circ q \circ p)^* = p^* \circ q^* \circ p^* = p \circ q \circ p$ donc $p \circ q \circ p$ est autoadjoint. Le théorème spectral permet de conclure.
- (a) Soit $y \in E$. Alors, $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \text{Ker}(q)$ et $y_2 \in \text{Im}(q)$. Par orthogonalité de $\text{Ker}(q)$ et $\text{Im}(q)$,

$$\langle q(y)|y \rangle = \langle y_2|y_1 + y_2 \rangle = \|y_2\|^2 = \|q(y)\|^2$$

- Soient λ une valeur propre de $r = p \circ q \circ p$ et x un vecteur propre associé.

$$\langle r(x)|x \rangle = \lambda \|x\|^2 = \langle q(p(x))|p(x) \rangle = \|q(p(x))\|^2$$

Comme $x \neq 0_E$, on en déduit directement que $\lambda \geq 0$. De plus, p, q étant des projecteurs orthogonaux,

$$\|q(p(x))\| \leq \|p(x)\| \leq \|x\| \text{ et donc, } \lambda \leq 1$$

♣♣♣ **Exercice 4** — Soit (e_1, \dots, e_n) une base d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$.

- Soit u l'endomorphisme défini par :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle e_i$$

Montrer que u est symétrique défini positif.

- Montrer qu'il existe v autoadjoint tel que $v^2 = u^{-1}$.
- Prouver que la famille $(v(e_1), \dots, v(e_n))$ est une base orthonormale de E .

Correction —

- Soient $x, y \in E$. $\langle u(x)|y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle \langle y|e_i \rangle$.

Par symétrie en x, y , $\langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle$ et $u^* = u$.

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x)|x \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x|e_i \rangle^2 \geq 0$$

La somme est nulle lorsque $x \perp e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire lorsque $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = E^\perp = \{0\}$. Ainsi, $u \in \mathcal{S}^{++}(E)$.

- Classique, on peut considérer la matrice :

$$\text{diag}\left(1/\sqrt{\lambda_1}, \dots, 1/\sqrt{\lambda_n}\right) \text{ avec } \text{Sp}(u) = \{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset \mathbb{R}_+^*$$

- Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\langle v(e_i)|v(e_j) \rangle = \langle e_i|v^2(e_j) \rangle = \langle e_i|u^{-1}(e_j) \rangle = \delta_{i,j}$$

$$\text{puisque } u(u^{-1}(e_j)) = \sum_{i=1}^n \langle u^{-1}(e_j)|e_i \rangle e_i = e_j.$$

La famille est orthonormale, de cardinal n : il s'agit bien une base orthonormale de E .

♣♣♣ **Exercice 5** — Soit (a, b) une famille libre d'un espace euclidien E et $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par $u(x) = \langle a|x \rangle b$.

- Déterminer u^* .
- Déterminer ses éléments propres de $v = u + u^*$.
- Calculer $\max_{\|x\|=1} \{\langle v(x)|x \rangle\}$.

Indication — 2. Diagonaliser $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v|_{\text{Vect}(a,b)})$ où $\mathcal{B} = (a, b)$.

Correction —

- Soient $x, y \in E$.

$$\langle u(x)|y \rangle = \langle a|x \rangle \langle b|y \rangle = \langle x|\langle b|y \rangle a \rangle$$

Donc $u^*(y) = \langle b|y \rangle a$.

- On notera que v est autoadjoint donc diagonalisable d'après le théorème spectral.

$$\forall x \in E, \quad u(x) + u^*(x) = \langle a|x \rangle b + \langle b|x \rangle a$$

Une analyse de l'équation $u(x) = \lambda x$ conduit rapidement à distinguer trois cas : $x \in \text{Vect}(a, b)^\perp$, $x \in \text{Vect}(a + b)$, $x \in \text{Vect}(a - b)$. On peut s'aider de la restriction de $u + u^*$ au sous-espace stable $\text{Vect}(a, b)$ et construire la matrice 2×2 associée, facilement diagonalisable. D'où les trois (pourquoi ?) sous-espaces propres suivants :

- $E_0 = \text{Vect}(a, b)^\perp$;
- $E_{\langle a|b \rangle + \|a\|\|b\|} = \text{Vect} \left(\frac{a}{\|a\|} + \frac{b}{\|b\|} \right)$;
- $E_{\langle a|b \rangle - \|a\|\|b\|} = \text{Vect} \left(\frac{a}{\|a\|} - \frac{b}{\|b\|} \right)$.

- On retrouve le classique quotient de Rayleigh (cf. TD).

$$\max_{\|x\|=1} \{ \langle v(x)|x \rangle \} = \lambda_{\max} = \langle a|b \rangle + \|a\|\|b\| > 0$$

♣♣♣ Exercice 6 — Décomposition polaire, bis repetita
On munit de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

- Vérifier que pour tout $A \in A_n(\mathbb{R})$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA) \in O_n(\mathbb{R})$$

- Prouver que lorsque $S \in S_n^+(\mathbb{R})$,

$$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(S\Omega) \leq \text{Tr}(S)$$

- Établir la réciproque en considérant $\Omega = \exp(tA)$.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Montrer la continuité de $X \mapsto \text{Tr}(MX)$ sur $O_n(\mathbb{R})$.
- En déduire qu'il existe $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = S\Omega$.

Indication — 3. Dériver la fonction $\varphi : t \mapsto \text{Tr}(S \exp(tA))$ et évaluer en 0 pour montrer que $S \in S_n(\mathbb{R})$. 4. Exploiter la compacité de $O_n(\mathbb{R})$ et la caractérisation établie en 2. et 3.

Correction —

- Rappelons que si M et N commutent, $\exp(M)\exp(N) = \exp(M+N)$. De plus, la transposition étant continue (app. linéaire en dimension finie), $\exp(M)^\top = \exp(M^\top)$. D'où,

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(tA)\exp(tA)^\top &= \exp(tA)\exp(-tA) \\ &= \exp(0) = I_n \end{aligned}$$

Ainsi, $\exp(tA) \in O_n(\mathbb{R})$.

- Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, $S = PDP^\top$ avec $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale, à coefficients positifs ou nuls. Donc pour tout $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, en posant $\Omega' = P^\top \Omega P$,

$$\text{Tr}(S\Omega) = \text{Tr}(PDP^\top \Omega) = \text{Tr}(DP^\top \Omega P) = \text{Tr}(D\Omega')$$

$\Omega' \in O_n(\mathbb{R})$, ses coefficients $\omega'_{i,j}$ vérifient donc $|\omega'_{i,j}| \leq 1$. Ainsi, puisque les coefficients λ_k sont tous positifs,

$$\text{Tr}(D\Omega') = \sum_{k=1}^n \lambda_k \omega'_{k,k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k = \text{Tr}(D) = \text{Tr}(S)$$

- Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(S\Omega) \leq \text{Tr}(S)$$

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{Tr}(S \exp(tA)) \leq \text{Tr}(S)$. La fonction $\varphi : t \mapsto \text{Tr}(S \exp(tA))$ admet un maximum en $t = 0$. De plus, φ est dérivable et (pour les 3/2, attendre les prochains chapitres) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = \text{Tr}(SA \exp(tA))$$

$\varphi'(0) = \text{Tr}(SA) = 0$ donc $S \in S_n(\mathbb{R})$.

Il reste à montrer que les valeurs propres de S sont positives. Avec les notations précédentes,

$$\forall \Omega' \in O_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(D\Omega') \leq \text{Tr}(D)$$

$$\text{soit } \sum_{k=1}^n \lambda_k \omega'_{k,k} \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Il suffit alors de considérer la matrice $\Omega' \in O_n(\mathbb{R})$ diagonale telle que $\omega'_{k,k} = -1$ si $\lambda_k < 0$, $\omega'_{k,k} = 1$ sinon.

D'où $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k$ et la conclusion : $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

- L'application $X \mapsto \text{Tr}(MX)$ est linéaire (en dim. finie) donc continue sur le compact $O_n(\mathbb{R})$. Elle admet un maximum, atteint en mettons $\Omega' \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\forall X \in O_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(MX) \leq \text{Tr}(M\Omega')$$

Posons maintenant $S = M\Omega'$. L'inégalité se réécrit :

$$\forall \Omega \in O_n(\mathbb{R}), \quad \text{Tr}(S\Omega) \leq \text{Tr}(S)$$

D'après ce qui précède, $S \in S_n^+(\mathbb{R})$. D'où $M = S\Omega'^\top$.