Intégrales à paramètre

Entraînement 16

♣ Exercice 1 — Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$$

1. Montrer que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et de limite nulle en $+\infty$.
2. À l'aide d'une domination locale, montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Correction —

1. • Remarquons tout d'abord que :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Comme φ est intégrable sur $[0,+\infty[$, il en va de même par comparaison pour $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ pour tout $x > 0$.

• Par ailleurs,

$$|F(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\right| dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$$

On peut conclure en constatant que $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2. On vérifie les différentes hypothèses de continuité et d'intégrabilité du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre. Avec, en particulier, pour tout $a > 0$, en posant $f(x,t) = \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

$$\forall (x,t) \in [a,+\infty[\times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right| \leqslant e^{-at}$$

La domination étant assurée localement, F est bien de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. On obtient le résultat par intégration par parties (sur un segment !).

♣♣ Exercice 2 — On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\, d\theta$$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
3. En déduire que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser le développement.

Correction —

1. Il suffit de majorer l'intégrande et ses dérivées successives par 1.
2. Une intégration par parties nous permet d'établir que f est solution de :

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

3. • La fonction f étant paire, on peut dès lors résoudre l'équation en cherchant y sous la forme $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ et en dérivant terme à terme. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{4(n+1)^2}$$

D'où $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Le rayon de convergence vaut alors $+\infty$.

• f est l'unique solution vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

♣♣ Exercice 3 — On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx}\, dt$$

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour tout $x \geqslant 0$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,0,+\infty\,[$.
3. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction —

1. Posons $f(x,t) = \dfrac{e^{-t}}{1+tx}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $f(x,t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc F est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. • Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est infiniment dérivable et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t) = \frac{(-1)^n n!\, t^n}{(1+tx)^{n+1}} e^{-t}$$

• $t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, continue sur $\mathbb{R}_+$.

• Enfin, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| = n!\, t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

F est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}}\, dt$$

3. D'où $F^{(n)}(0) = (-1)^n n! \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = (-1)^n (n!)^2$.