

Équations différentielles linéaires

ENTRAÎNEMENT 16

♣ **Exercice 1** — On considère l'équation différentielle $(t^2 - 1)y' + ty = t^3 - t$ (\mathcal{E}).

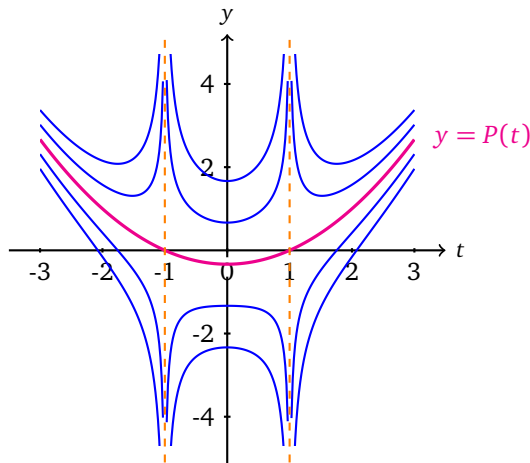
1. Donner les solutions polynomiales de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R} .
2. Résoudre (\mathcal{E}) sur chacun des trois intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 1[$, $]1, +\infty[$.
3. En déduire les solutions de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R} .

Correction —

1. Une analyse de degré nous pousse à rechercher P sous la forme $P(t) = at^2 + bt + c$. On trouve $P(t) = \frac{1}{3}(t^2 - 1)$.
2. On trouve $y(t) = \frac{1}{3}(t^2 - 1) + \frac{C}{\sqrt{|t^2 - 1|}}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
3. y est solution de (\mathcal{E}) sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ ssi il existe trois constantes réelles C_1, C_2 et C_3 telles que :

$$\forall t \in I_i, \quad y(t) = P(t) + \frac{C_i}{\sqrt{|1 - t^2|}}$$

en posant $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1, 1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.



Pour des raisons de continuité (raccordement des solutions), on trouve $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ en passant à la limite. Ainsi, P est l'unique solution de (\mathcal{E}) sur \mathbb{R} .

♣ **Exercice 2** — On considère l'équation diff. :

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x) \quad (*)$$

1. (a) Chercher les solutions de l'équation homogène associée sous la forme $x \mapsto x^\alpha$.
(b) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur \mathbb{R}_+^* .
2. Résoudre enfin (*) sur $]-1, +\infty[$ en posant $z(x) = x^2 y(x)$.

Indication — Ne pas oublier de vérifier la continuité des solutions obtenues en 0...

Correction —

1. • En injectant, $\alpha^2 + 3\alpha + 2 = 0$. Ainsi, $\alpha = -1$ ou $\alpha = -2$.
• Comme l'ensemble des solutions de l'équation homogène sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* est un espace vectoriel de dimension 2 (équation linéaire sans second membre d'ordre 2), celle-ci admet pour solution générale :

$$y(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

2. • Il s'agit ici de trouver une solution particulière de l'équation différentielle. En posant $z(x) = x^2 y(x)$, on obtient $z''(x) = \ln(1 + x)$. En intégrant, on a :

$$z(x) = \frac{(x + 1)^2}{2} \ln(1 + x) - \frac{3}{4}x^2$$

Pas besoin de rajouter de constantes d'intégration, on cherche ici une solution.

- Si y est solution sur $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, alors :

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \ln(1 + x) - \frac{3}{4} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2}$$

avec $A, B \in \mathbb{R}$ (dépendant de l'intervalle d'intégration).

- Reste à étudier la continuité (et même la double dérivabilité) des solutions sur $]-1, +\infty[$. Un problème apparaît en 0. Un développement asymptotique donne :

$$y(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{B}{x^2} + \frac{A + 1/2}{x} + \frac{1}{6}x + o(x)$$

On doit donc avoir $B = 0$ et $A = -\frac{1}{2}$, soit :

$$y(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \ln(1 + x) - \frac{3}{4} - \frac{1}{2x}$$

- Réciproquement, cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ , car développable en série entière sur $]-1, 1[$. (à vérifier !)

♣ **Exercice 3** — Résoudre le problème différentiel :

$$\begin{cases} x' = 4x + y + z \\ y' = x + 4y + z \\ z' = x + y + 4z \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} x(0) = y(0) = 2 \\ z(0) = -1 \end{cases}$$

Correction — Posons $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

$A \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est diagonalisable d'après le théorème spectral. On trouve facilement $\chi_A = -(X - 6)(X - 3)^2$ puis :

$$E_6 = \text{Vect}((1, 1, 1)); \quad E_3 = \text{Vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$$

Avec les notations classiques, $X = c_1 e^{6t} X_1 + c_2 e^{3t} X_2 + c_3 e^{3t} X_3$. Puis, au moyen des conditions initiales,

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} + e^{6t} \\ y(t) = e^{3t} + e^{6t} \\ z(t) = -2e^{3t} + e^{6t} \end{cases}$$

♣♣ **Exercice 4** — Résoudre l'équation différentielle $t^2 y'' - 2y = 3t^2$ sur \mathbb{R}_+^* puis sur \mathbb{R} à l'aide de la méthode de variation des constantes.

Indication — On cherchera un système fondamental de solutions de l'équation homogène sous la forme $t \mapsto t^\alpha$.

Correction — Les fonctions $y_1 : t \mapsto t^2$ et $y_2 : t \mapsto t^{-1}$ sont solutions évidentes de l'équation homogène. Dès lors, on cherche les solutions de l'équation complète sous la forme :

$$y(t) = \lambda(t)t^2 + \frac{\mu(t)}{t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = 3t \end{cases}$$

On trouve $y(t) = \lambda_i t^2 + \frac{\mu_i}{t} + t^2 \ln|t|$ sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* .

Les conditions de raccordement conduisent à l'inexistence d'une solution de l'équation sur \mathbb{R} et à la famille de solutions $t \mapsto \lambda t^2 + \frac{\mu}{t} + t^2 \ln(t)$ sur \mathbb{R}_+^* .

♣♣ **Exercice 5** — Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Montrer que $\exp(N) = I_n + A$ où A est une matrice nilpotente qui commute avec N .

2. (a) On pose $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$ et $Q_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{X^k}{k}$.

Montrer que X^{n+1} divise $P_n \circ Q_n - X$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Établir l'existence d'une matrice nilpotente N telle que $\exp(N) = I_n + A$.

Indication — 2. On pensera aux développements limités.

Correction —

1. $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!} = I_n + A$ où $A = NP(N)$, $P = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X^{k-1}}{k!}$.

$AN = NA$. Par commut. de N et $P(N)$, A est nilpotente.

2. (a) En composant les DLs de $e^x - 1 = P_n(x) + o(x^n)$ et $\ln(1+x) = Q_n(x) + o(x^n)$, on obtient :

$$P_n(Q_n(x)) = x + o(x^n)$$

D'où le résultat : $P_n \circ Q_n = X + X^n R_n$ avec $R_n \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. $N = Q_n(A)$ est nilpotente. D'où l'égalité :

$$\begin{aligned} \exp(N) &= I_n + P_n(Q_n(A)) \\ &= I_n + A + A^n R_n(A) = I_n + A \end{aligned}$$

La fonction \exp établit ainsi une bijection entre les matrices nilpotentes et les matrices dites unipotentes.