

Intégrales à paramètre

ENTRAÎNEMENT 17

♣ **Exercice 1** — Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que F est bien définie sur \mathbb{R}_+^* et de limite nulle en $+\infty$.
2. À l'aide d'une domination locale, montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .
3. Montrer que F est solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$.

Correction —

1. • Remarquons tout d'abord que :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

Comme φ est intégrable sur $[0, +\infty[$, il en va de même par comparaison pour $t \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ pour tout $x > 0$.

- Par ailleurs,

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

On peut conclure en constatant que $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

2. On vérifie les différentes hypothèses de continuité et d'intégrabilité du théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre. Avec, en particulier, pour tout $a > 0$, en posant $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$.

$$\forall (x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-at}$$

La domination étant assurée localement, F est bien de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* .

3. On obtient le résultat par intégration par parties (sur un segment!).

♣♣ **Exercice 2** — On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$$

1. Montrer que f est définie et de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .
2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution.
3. En déduire que f est développable en série entière sur \mathbb{R} et préciser le développement.

Correction —

1. Il suffit de majorer l'intégrande et ses dérivées successives par 1.
2. Une intégration par parties nous permet d'établir que f est solution de :

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0$$

3. • La fonction f étant paire, on peut dès lors résoudre l'équation en cherchant y sous la forme $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ et en dérivant terme à terme. On obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = -\frac{a_n}{4(n+1)^2}$$

D'où $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} a_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le rayon de convergence vaut alors $+\infty$.

- f est l'unique solution vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

♣♣♣ **Exercice 3** — On pose :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt$$

1. Montrer que $F(x)$ est définie pour tout $x \geq 0$.
2. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer $F^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction —

1. Posons $f(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+tx}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+, t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc F est bien définie sur \mathbb{R}_+ .

2. • Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est infiniment dérivable et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) = \frac{(-1)^n n! t^n}{(1+tx)^{n+1}} e^{-t}$$

- $t \mapsto \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t)$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, continue sur \mathbb{R}_+ .
- Enfin, quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, \quad \left| \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x, t) \right| = n! t^n e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

F est donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad F^{(n)}(x) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{(1+tx)^{n+1}} dt$$

3. D'où $F^{(n)}(0) = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = (-1)^n (n!)^2$.