

# Calcul différentiel

ENTRAÎNEMENT 17

♣ **Exercice 1** — Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Déterminer les dérivées ou dérivées partielles premières de :

$$g_1(x, y) = f(y, x); \quad g_2(x) = f(x, x);$$

$$g_3(x) = f(x^2, x^3); \quad g_4(x, y) = f(y, f(x, x))$$

**Correction** — Par composition, les fonctions sont toutes de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

- $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$  et  $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$  ;
- $g'_2(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$  ;
- $g'_3(x) = 2x \frac{\partial f}{\partial x}(x^2, x^3) + 3x^2 \frac{\partial f}{\partial y}(x^2, x^3)$  ;
- $\frac{\partial g_4}{\partial x}(x, y) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(y, f(x, x))$  et  $\frac{\partial g_4}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, f(x, x))$ .

♣ **Exercice 2** — Déterminer les extrema sur  $\mathbb{R}^2$  de  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2x^2y - 2$ .

**Correction** —

- $f$  est polynomiale donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- On recherche les points critiques sur l'ouvert  $\mathbb{R}^2$ .  

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff (x, y) \in \{(0, 0), (\pm 1/\sqrt{2}, -1/2)\}$$
- Pour identifier les extrema, on calcule les trois hessiennes suivantes :

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } H_f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

La trace et le déterminant permettent de conclure : pour les deux derniers couples, les valeurs propres sont de signes opposés donc il s'agit de points selles.  $f$  admet un unique minimum, atteint en  $(0, 0)$ ; il vaut  $-2$ .

♣ **Exercice 3** — Soient  $a, b \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \langle a, x \rangle \cdot \langle b, x \rangle$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^n$  et donner sa hessienne en tout point.

**Indication** — Exprimer  $f(x)$  sous forme de somme double.

**Correction** — Prenons  $a = (a_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_i b_j x_i x_j$ .

$f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  car polynomiale et :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_i b_j + a_j b_i$$

D'où  $H_f(x) = (a_i b_j + a_j b_i)_{1 \leq i, j \leq n} = ab^\top + ba^\top \in S_n(\mathbb{R})$ .

La hessienne est constante en tout point compte tenu du fait que  $f$  est polynomiale de degré 2. En fait,  $f(x) = \frac{1}{2}x^\top H_f x$ .

Il est possible de se dispenser du calcul via les coordonnées en différentiant  $df$ . Soient  $x, h, k \in \mathbb{R}^n$ .

$$f(x+h) - f(x) = \langle a, x \rangle \langle b, h \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, x \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, h \rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $\langle a, h \rangle \langle b, h \rangle = o(\|h\|)$  donc  $df_x(h) = \langle a, x \rangle \langle b, h \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, x \rangle$ . De plus,

$$df_{x+k}(h) - df_x(h) = \langle a, k \rangle \langle b, h \rangle + \langle a, h \rangle \langle b, k \rangle = k^\top (ab^\top + ba^\top) h = k^\top H_f(x) h$$

♣♣ **Exercice 4** — Déterminer toutes les fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $(\mathbb{R}^*_+)^2$  vérifiant :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

On posera  $u = xy$  et  $v = \frac{y}{x}$ .

**Correction** — Le changement de variables (bijectif et de classe  $\mathcal{C}^2$ ) conduit à dériver :

$$g(u, v) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$$

On trouve  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$  puis  $f(x, y) = \varphi_1(xy) + \varphi_2(y/x)$  où  $\varphi_1, \varphi_2$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^*_+$ .

♣♣ **Exercice 5** — *Théorème de Rolle généralisé*  
 On munit  $\mathbb{R}^n$  de sa structure euclidienne canonique et on note  $\mathcal{S}$  la sphère unité. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable telle que  $f|_{\mathcal{S}}$  soit constante. Prouver qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x_0\| < 1$  et  $df_{x_0}$  est nulle.

**Indication** — On introduira le minimum  $m$  et le maximum  $M$  atteint par  $f$  sur  $\mathcal{B}_f(0, 1)$ .

**Correction** —

- $f$  est continue sur le compact  $\mathcal{B}_f(0, 1)$  donc atteint un min.  $m$  en  $x_* \in \mathcal{B}_f(0, 1)$  et un max.  $M$  en  $x^* \in \mathcal{B}_f(0, 1)$ .
- Si  $m = M$ , la fonction  $f$  est constante sur  $\mathcal{B}_f(0, 1)$  donc  $df_x$  est nulle en tout point  $x$  de l'ouvert  $\mathcal{B}(0, 1)$ .
- En revanche, si  $m < M$ ,  $f$  étant constante sur  $\mathcal{S}$ , au moins l'un des deux points  $x_*, x^*$  n'est pas dans  $\mathcal{S}$ .  $f$  atteignant un extremum en un point de l'ouvert  $\mathcal{B}(0, 1)$ , sa différentielle en ce point est nulle d'après le cours.

**♣♣ Exercice 6 — Une inégalité de Hardy**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ , deux réels  $p, q$  tels que  $1 < p \leq q$ .  
Montrer que pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}$$

**Indications** — Les multiplicateurs de Lagrange sont vos amis.

Maximiser d'abord  $\sum_{k=1}^n |x_k|^p$  sous la contrainte  $\sum_{k=1}^n |x_k|^q = 1$ .

**Correction** — Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , et quitte à travailler sur  $(\mathbb{R}_+)^n$ , on considère les deux applications définies par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^p \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n x_k^q - 1$$

Elles sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $(\mathbb{R}_+)^n \setminus \{0\}$ .

On cherche à calculer, sous réserve d'existence,  $\max_{g(x)=0} f(x)$ .

• *Existence d'un maximum*

Un tel maximum existe puisque  $f$  est continue sur le compact  $(\mathbb{R}_+)^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$  (sphère unité pour  $\|\cdot\|_q$ ).

• *Recherche des points critiques*

Si  $x$  est un point critique de  $f$  sous la contrainte  $g(x) = 0$ , il existe  $\lambda \neq 0$  tel que :

$$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \quad \text{i.e.} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad p x_k^{p-1} = \lambda q x_k^{q-1}$$

Les coefficients  $x_k$  sont soit nuls soit vérifient  $x_k^{p-q} = \frac{q}{p} \lambda$ . Les coordonnées non nulles de  $x$  sont ainsi toutes égales, mettons égales à un réel positif  $\mu$ . La contrainte  $g(x) = 0$  donne alors  $m \mu^q = 1$  où  $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$  est le nombre de coordonnées non nulles. D'où  $\mu = \frac{1}{m^{1/q}}$ .

• *Recherche du maximum*

En un tel point critique,  $f(x) = m \mu^p = m^{1-p/q}$ .  $p/q \leq 1$  donc  $f(x)$  est maximal pour  $m = n$ . Ainsi,

$$\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad g(x) = 0 \implies f(x) \leq n^{1-p/q}$$

avec égalité pour  $x = \frac{1}{n^{1/q}}(1, \dots, 1)$ .

Soit maintenant  $y \in (\mathbb{R}_+)^n$  tel que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$y_k = |x_k| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{-1/q}$$

Par construction,  $g(y) = 0$ . Donc  $f(y) \leq n^{1-p/q}$ , soit :

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n^{1-p/q} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{p/q}$$

Ainsi,  $\|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q$ .

**♣♣♣ Exercice 7 — Espace tangent à  $O_n(\mathbb{R})$**

Soient  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et l'application  $f : M \mapsto M^\top M$ .

1. Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $E$  et donner  $df_{I_n}$ .
2. Prouver, à l'aide de l'application  $\gamma : t \mapsto e^{tA}$ , que  $T_{I_n} O_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})$ .
3. En déduire que si  $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $T_\Omega O_n(\mathbb{R}) = \Omega A_n(\mathbb{R})$ .

**Indication** — 1. La norme usuelle est sous-multiplicative.

**Correction** —

1.  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  par produit et transposition (application linéaire en dimension finie). Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

$$f(I_n + H) = (I_n + H)^\top (I_n + H) = I_n + H + H^\top + H^\top H$$

De plus, pour la norme euclidienne usuelle sur  $E$ ,

$$\|H^\top H\| \leq \|H\|^2 \text{ donc } H^\top H = o(\|H\|)$$

Ainsi,  $f(I_n + H) = f(I_n) + H + H^\top + o(\|H\|)$ .

$H \mapsto H + H^\top$  étant linéaire,  $df_{I_n}(H) = H + H^\top$ .

2. • Soit  $A \in T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$ . Alors, il existe  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow O_n(\mathbb{R})$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma'(0) = A$ .

$$\forall t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad f(\gamma(t)) = I_n$$

Ainsi, en différentiant,  $df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ . En  $t = 0$ , on trouve  $A + A^\top = 0$ , i.e.  $A \in A_n(\mathbb{R})$ .

- Soit  $A \in A_n(\mathbb{R})$ . L'application  $\gamma : t \mapsto e^{tA}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $O_n(\mathbb{R})$ . En effet, si  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \gamma(t)^\top \gamma(t) &= \exp(tA)^\top \exp(tA) \\ &\stackrel{\text{cont. de la transp.}}{=} \exp(-tA) \exp(tA) \\ &\stackrel{(-tA)(tA) = (tA)(-tA)}{=} \exp(0) = I_n \end{aligned}$$

De plus,  $\gamma(0) = I_n$  et  $\gamma'(0) = A$  donc  $A \in T_{I_n} O_n(\mathbb{R})$ .

3. On reprend le même raisonnement avec cette fois-ci  $df_\Omega(H) = \Omega^\top H + H^\top \Omega$  et  $\gamma(t) = \Omega \exp(tA)$ .