Calcul différentiel

Entraînement 18

♣ **Exercice 1 —** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Déterminer les dérivées ou dérivées partielles premières de :

$$g_1(x,y) = f(y,x)\,; \qquad g_2(x) = f(x,x)\,;$$
$$g_3(x) = f(x^2,x^3)\,; \quad g_4(x,y) = f(y, f(x,x))$$

Correction — Par composition, les fonctions sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

- $\dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(y,x)$ et $\dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$;
- $g_2'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)$;
- $g_3'(x) = 2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^2,x^3) + 3x^2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x^2,x^3)$;
- $\dfrac{\partial g_4}{\partial x}(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)\right)\dfrac{\partial f}{\partial y}(y,f(x,x))$ et $\dfrac{\partial g_4}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(y,f(x,x))$.

♣ **Exercice 2 —** Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 2x^2y - 2$.

Correction —

- f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
- On recherche les points critiques sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) \in \{(0,0), (\pm 1/\sqrt{2}, -1/2)\}$$

- Pour identifier les extrema, on calcule les trois hessiennes suivantes :

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } H_f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ \pm 2\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

La trace et le déterminant permettent de conclure : pour les deux derniers couples, les valeurs propres sont de signes opposés donc il s'agit de points selles. f admet un unique minimum, atteint en $(0,0)$; il vaut -2.

♣ **Exercice 3 —** Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a, x\rangle \cdot \langle b, x\rangle$.
Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et donner sa hessienne en tout point.

Indication — Exprimer $f(x)$ sous forme de somme double.

Correction — Prenons $a = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $b = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i b_j x_i x_j$.

f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ car polynomiale et :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = a_i b_j + a_j b_i$$

D'où $H_f(x) = \left(a_i b_j + a_j b_i\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = ab^\top + ba^\top \in \mathrm{S}_n(\mathbb{R})$.
La hessienne est constante en tout point compte tenu du fait que f est polynomiale de degré 2. En fait, $f(x) = \frac{1}{2}x^\top H_f x$.

Il est possible de se dispenser du calcul via les coordonnées en différentiant df. Soient $x, h, k \in \mathbb{R}^n$.

$$f(x+h) - f(x) = \langle a,x\rangle\langle b,h\rangle + \langle a,h\rangle\langle b,x\rangle + \langle a,h\rangle\langle b,h\rangle$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\langle a,h\rangle\langle b,h\rangle = o(\|h\|)$ donc $df_x(h) = \langle a,x\rangle\langle b,h\rangle + \langle a,h\rangle\langle b,x\rangle$. De plus,

$$\begin{aligned} df_{x+k}(h) - df_x(h) &= \langle a,k\rangle\langle b,h\rangle + \langle a,h\rangle\langle b,k\rangle \\ &= k^\top(ab^\top + ba^\top)h = k^\top H_f(x) h \end{aligned}$$

♣♣ **Exercice 4 —** Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

On posera $u = xy$ et $v = \dfrac{y}{x}$.

Correction — Le changement de variables (bijectif et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$) conduit à dériver :

$$g(u,v) = g\left(xy, \frac{y}{x}\right) = f(x,y)$$

On trouve $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = 0$ puis $f(x,y) = \varphi_1(xy) + \varphi_2(y/x)$ où φ_1, φ_2 sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

♣♣ **Exercice 5 —** *Théorème de Rolle généralisé*
On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on note $\mathscr{S}$ la sphère unité. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $f_{|\mathscr{S}}$ soit constante.
Prouver qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x_0\| < 1$ et $\mathrm{d}f_{x_0}$ est nulle.

Indication — On introduira le minimum m et le maximum M atteint par f sur $\mathscr{B}_f(0,1)$.

Correction —

- f est continue sur le compact $\mathscr{B}_f(0,1)$ donc atteint un min. m en $x_* \in \mathscr{B}_f(0,1)$ et un max. M en $x^* \in \mathscr{B}_f(0,1)$.
- Si $m = M$, la fonction f est constante sur $\mathscr{B}_f(0,1)$ donc $\mathrm{d}f_x$ est nulle en tout point x de l'ouvert $\mathscr{B}(0,1)$.
- En revanche, si $m < M$, f étant constante sur $\mathscr{S}$, au moins l'un des deux points x_*, x^* n'est pas dans $\mathscr{S}$. f atteignant un extremum en un point de l'ouvert $\mathscr{B}(0,1)$, sa différentielle en ce point est nulle d'après le cours.

♣♣ Exercice 6 — *Une inégalité de Hardy*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, deux réels p, q tels que $1 < p \leqslant q$.
Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}$$

Indications — Les multiplicateurs de Lagrange sont vos amis. Maximiser d'abord $\sum_{k=1}^n |x_k|^p$ sous la contrainte $\sum_{k=1}^n |x_k|^q = 1$.

Correction — Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$, et quitte à travailler sur $(\mathbb{R}_+)^n$, on considère les deux applications définies par :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k^p \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{k=1}^n x_k^q - 1$$

Elles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+)^n \setminus \{0\}$.
On cherche à calculer, sous réserve d'existence, $\max\limits_{g(x)=0} f(x)$.

- *Existence d'un maximum*
  Un tel maximum existe puisque f est continue sur le compact $(\mathbb{R}_+)^n \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ (sphère unité pour $\|\cdot\|_q$).
- *Recherche des points critiques*
  Si x est un point critique de f sous la contrainte $g(x) = 0$, il existe $\lambda \neq 0$ tel que :
  $$\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x) \ \text{ i.e. } \ \forall k \in [\![1, n]\!],\ p x_k^{p-1} = \lambda q x_k^{q-1}$$
  Les coefficients x_k sont soit nuls soit vérifient $x_k^{p-q} = \frac{q}{p}\lambda$. Les coordonnées non nulles de x sont ainsi toutes égales, mettons égales à un réel positif μ. La contrainte $g(x) = 0$ donne alors $m\mu^q = 1$ où $m \in [\![1, n]\!]$ est le nombre de coordonnées non nulles. D'où $\mu = \frac{1}{m^{1/q}}$.
- *Recherche du maximum*
  En un tel point critique, $f(x) = m\mu^p = m^{1-p/q}$. $p/q \leqslant 1$ donc $f(x)$ est maximal pour $m = n$. Ainsi,
  $$\forall x \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant n^{1-p/q}$$
  avec égalité pour $x = \frac{1}{n^{1/q}}(1, \dots, 1)$.

Soit maintenant $y \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$y_k = |x_k| \cdot \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{-1/q}$$

Par construction, $g(y) = 0$. Donc $f(y) \leqslant n^{1-p/q}$, soit :

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^p \leqslant n^{1-p/q}\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{p/q}$$

Ainsi, $\|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q$.

♣♣♣ Exercice 7 — *Espace tangent à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*
Soient $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application $f : M \mapsto M^\top M$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur E et donner $\mathrm{d}f_{I_n}$.
2. Prouver, à l'aide de l'application $\gamma : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$, que $\mathrm{T}_{I_n}\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que si $\Omega \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{T}_\Omega \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \Omega \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.

Indication — 1. La norme usuelle est sous-multiplicative.

Correction —

1. f est de classe $\mathscr{C}^1$ par produit et transposition (application linéaire en dimension finie). Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   $$f(I_n + H) = (I_n + H)^\top (I_n + H) = I_n + H + H^\top + H^\top H$$
   De plus, pour la norme euclidienne usuelle sur E,
   $$\|H^\top H\| \leqslant \|H\|^2 \text{ donc } H^\top H = \mathrm{o}(\|H\|)$$
   Ainsi, $f(I_n + H) = f(I_n) + H + H^\top + \mathrm{o}(\|H\|)$.
   $H \mapsto H + H^\top$ étant linéaire, $\mathrm{d}f_{I_n}(H) = H + H^\top$.
2. - Soit $A \in \mathrm{T}_{I_n}\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Alors, il existe $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$.
     $$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad f(\gamma(t)) = I_n$$
     Ainsi, en différentiant, $\mathrm{d}f_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$. En $t = 0$, on trouve $A + A^\top = 0$, i.e. $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $A \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. L'application $\gamma : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. En effet, si $t \in \mathbb{R}$,
     $$\begin{aligned} \gamma(t)^\top \gamma(t) &= \exp(tA)^\top \exp(tA) \\ &\underset{\text{cont. de la transp.}}{=} \exp(-tA)\exp(tA) \\ &\underset{(-tA)(tA)=(tA)(-tA)}{=} \exp(0) = I_n \end{aligned}$$
     De plus, $\gamma(0) = I_n$ et $\gamma'(0) = A$ donc $A \in \mathrm{T}_{I_n}\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
3. On reprend le même raisonnement avec cette fois-ci $\mathrm{d}f_\Omega(H) = \Omega^\top H + H^\top \Omega$ et $\gamma(t) = \Omega \exp(tA)$.