Norme sur un espace vectoriel

PRÉPARATION 2

♣ Exercice 1 — Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|M\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}|$$

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $|\lambda| \leqslant \|M\|$.

Correction —

1. Classique !
2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre associé.

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} m_{ik}x_k = \lambda x_i$$

Donc, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, par inégalité triangulaire,

$$|\lambda|\cdot|x_i| \leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k| \cdot \sum_{k=1}^{n} |m_{ik}| \leqslant \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|\cdot\|M\|$$

Ainsi, en passant au sup, $|\lambda|\cdot\|X\|_\infty \leqslant \|M\|\cdot\|X\|_\infty$. Comme $\|X\|_\infty > 0$ (on aurait sinon $X = 0$), $|\lambda| \leqslant \|M\|$.

♣♣ Exercice 2 — Soient $E = \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ et les applications définies sur E par :

$$\forall f \in E, \quad \begin{aligned} N_1(f) &= |f(0)| + \|f'\|_\infty \,; \\ N_2(f) &= |f(0)| + |f'(0)| + \|f''\|_\infty \,; \\ N_3(f) &= \cdots \end{aligned}$$

Montrer que ce sont des normes et les comparer entre elles et à $\|\cdot\|_\infty$.

Indication — Penser à l'inégalité des accroissements finis.

Correction —

1. Posons, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$,

$$N_p(f) = \sum_{k=0}^{p-1} |f^{(k)}(0)| + \|f^{(p)}\|_\infty$$

Montrons que N_p définit bien une norme sur E.

- N_p est clairement à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- Si $N_p(f) = 0$, alors, la somme de termes positifs étant nulle, $\|f^{(p)}\|_\infty = 0$ et

$$\forall k \in [\![0,p-1]\!], \quad f^{(k)}(0) = 0$$

$f^{(p)}$ est donc nulle sur l'intervalle $[0,1]$ donc $f^{(p-1)}$ y est constante. Mais $f^{(p-1)}(0) = 0$, donc $f^{(p-1)}$ est nulle et ainsi de suite... On a bien $f = 0_E$.

- De plus, si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in E$,

$$N_p(\lambda f) = |\lambda|\sum_{k=0}^{p-1} |f^{(k)}(0)| + |\lambda|\cdot\|f^{(p)}\|_\infty = |\lambda|\cdot N_p(f)$$

- Enfin, si $f, g \in E$,

$$\begin{aligned} N_p(f+g) &= \sum_{k=0}^{p-1} |f^{(k)}(0) + g^{(k)}(0)| + \|f^{(p)} + g^{(p)}\|_\infty \\ &\leqslant \cdots \leqslant N_p(f) + N_p(g) \end{aligned}$$

2. Soit $f \in E$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x)| - |f(0)| \leqslant |f(x) - f(0)| \leqslant x\cdot\|f'\|_\infty \leqslant \|f'\|_\infty$$

Donc $\|f\|_\infty \leqslant N_1(f)$. On généralise facilement et on montre que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $N_p(f) \leqslant N_{p+1}(f)$.

♣♣ Exercice 3 — Soit $\ell^1(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles sommables, c'est-à-dire :

$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum |u_n| \text{ converge}\right\}$$

Pour tout $u \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose :

$$\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \,;\; \|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \,;\; \|u\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2\right)^{1/2}$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent deux normes sur $\ell^1(\mathbb{N})$ puis les comparer.
2. Montrer que tout élément de $\ell^1(\mathbb{N})$ est de carré sommable. Prouver que $\|\cdot\|_2$ est une norme et la comparer avec $\|\cdot\|_1$.

Indication — 1. On considérera une suite presque nulle pour montrer que les normes ne sont pas équivalentes.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \leqslant (|a| + |b|)^2$ et $2|ab| \leqslant a^2 + b^2$.

Correction —

1. Pas de grosses difficultés pour montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes. Rappelons que toute suite sommable converge vers 0, donc est bornée. $\|u\|_\infty$ a bien un sens. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| = \|u\|_1 \quad \text{donc} \quad \|u\|_\infty \leqslant \|u\|_1$$

Il ne peut exister de réel positif α tel que :

$$\|\cdot\|_1 \leqslant \alpha\|\cdot\|_\infty$$

Il suffit en effet de considérer la suite prenant la valeur 1 pour $n \leqslant N$ puis 0. On aurait $N \leqslant \alpha$ quel que soit N.

2. On montre par récurrence que pour tout $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=1}^{N} x_k^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |x_k|\right)^2$$

Si $u \in \ell^1(\mathbb{N})$, alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n^2 \leqslant \|u\|_1^2$.
La série à termes positifs est majorée, donc elle converge, ce qui montre que u est de carré sommable. En passant à la limite, on trouve $\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1$.
$\|\cdot\|_2$ est de plus une norme euclidienne, elle découle du produit scalaire défini par :

$$(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

Cette dernière somme a un sens puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant |u_n v_n| \leqslant \frac{1}{2} \cdot (u_n^2 + v_n^2)$$

Donc par comparaison, la série converge absolument.
Enfin, les deux normes ne sont pas équivalentes. Sinon, en utilisant la suite définie dans la question précédente, on établirait l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \leqslant \alpha\sqrt{N}$. Absurde !