Intégrales généralisées

ENTRAÎNEMENT 3

Attention !

Sur les intégrales impropres

1. On commencera toujours par évoquer la continuité de l'intégrande sur l'intervalle $]a, b[$ et on s'intéressera ensuite aux éventuels problèmes en a et b.
2. Si un problème a lieu en un point a différent de 0 ou de $+\infty$, on pourra éventuellement s'y rapporter en effectuant un changement de variables. Par exemple, $u = t - a$.
   Comme pour les calculs de limites, cela permet d'utiliser les intégrales de références.
3. Privilégier les intégrations par parties sur un segment avant de passer à la limite.
4. Penser au prolongement par continuité pour évacuer les « faux problèmes ».

♣ Exercice 1 — Déterminer en fonction du réel α la nature des intégrales suivantes.

1. $I = \displaystyle\int_0^1 x^\alpha \ln x \, dx$;
2. $J = \displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^\alpha \, dx$;
3. $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha \, dx$.

Indication — Pour J, on ramènera le problème en 0 par changement de variables.

Correction —

1. I converge ssi $\alpha > -1$.
2. J converge ssi $\alpha > -1$.
3. K converge ssi $-1 < \alpha < 1$.

♣ Exercice 2 — Étudier la convergence et calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \ln(x) \, dx$;
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\text{ch}x}$;
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.
4. $J_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} \, dx$;
5. $J_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 \ln x}{(1+x^4)^3} \, dx$;

Correction —

1-3. $I_1 = -1$ et $I_2 = I_3 = \pi$.

4. On étudiera la convergence en effectuant un changement de variables puis une intégration par parties. $J_1 = 2$.
5. On effectue un changement de variables ($t = x^4$) puis une intégration par parties. $J_2 = -1/32$.

♣ Exercice 3 — Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^2} \, dx$$

Correction — Linéarisation, $I = \dfrac{3}{4} \ln 3$.

♣♣ Exercice 4 — Montrer que :

$$I_n = \int_0^1 t^n \sin(\pi t) \, dt \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\pi}{n^2}$$

Indication — On pourra effectuer une double intégration par parties.

Correction — Les fonctions considérées sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0, 1]$ donc :

$$I_n = \frac{\pi}{(n+1)(n+2)} - \frac{\pi^2}{(n+1)(n+2)} \cdot \int_0^1 t^{n+2} \sin(\pi t) \, dt$$

La dernière intégrale tend vers 0 par encadrement.

♣♣ Exercice 5 —

Soient $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \, dt$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+x} \, dt$.

1. Montrer que f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) = e^{x^2} f(x^2)$.
3. En déduire que $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} -2e^{x^2} \ln(x)$.
4. Montrer de même que $g(x) \underset{x \to +\infty}{=} \dfrac{1}{x^2} + O\left(\dfrac{1}{x^4}\right)$.

Indication — On pourra effectuer une double intégration par parties

Correction —

1. La règle du « petit o » permet de conclure dans les deux cas.
2. On pose $u = x + t$.
3. Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt$ diverge et que $\displaystyle\frac{e^{-t}}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$,
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t} = -\ln|x| \text{ puis } g(x) \underset{x\to 0}{\sim} -e^{x^2}\ln(x^2)$$
4. On commence par montrer à l'aide d'une intégration par parties que :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{e^{-x}}{x} + O\left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)$$

♣♣♣ **Exercice 6 —** Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$J_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\,dt \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-nt}}{\sqrt{1+t^4}}\,dt$$
Calculer $J_{n,k}$ puis en déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{6}{n^4}$.

Indication — Pour $J_{n,k}$, déterminer une relation de récurrence. Pour I_n, majorer $J_{n,3} - I_n$ par $J_{n,7}$ à l'aide de l'expression conjuguée de $\sqrt{1+t^4} - 1$.

Correction — $J_{n,k} = \dfrac{k!}{n^{k+1}}$; $0 \leqslant \dfrac{6}{n^4} - I_n \leqslant \dfrac{5040}{n^8}$, on divise par $\dfrac{6}{n^4}$ puis théorème des gendarmes.