Réduction #1

ENTRAÎNEMENT 6

Attention !

1. Penser à vérifier que la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice.
2. $\mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n \iff \det(A-\lambda I_n) = 0 \iff \lambda$ est valeur propre de A.
   En particulier, $\mathrm{rg}(A) < n$ si et seulement si 0 est valeur propre de A.

♣ Exercice 1 — Réduire les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$$

Correction —

1. $\chi_A = (X-3)(X+3)^2$. χ_A est scindé.
   De plus, $\dim(\mathrm{Ker}(A+3I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(A+3I_3) = 2$ donc A est diagonalisable. On a $D = P^{-1}AP$ avec, par exemple,
   $$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2.
   - $\chi_B = (X+2)(X-1)^2$. χ_B est scindé. Seulement, $\dim(\mathrm{Ker}(B-I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(B-I_3) = 1$ donc B n'est pas diagonalisable.
   - χ_B étant néanmoins scindé, on peut trigonaliser B.
   - $X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 20 \end{pmatrix}^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres -2 et 1.
   - Il reste à compléter la famille libre (X_1, X_2) en une base avec, par exemple, le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.
   - On trouve alors $T = P^{-1}BP$ avec :
   $$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -28/3 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

♣ Exercice 2 — *Trigonalisation et puissances*

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est semblable à la matrice :
   $$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
2. En déduire M^n pour tout entier naturel n.

Indication — Considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M et construire une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle la matrice de f est T ou bien chercher une matrice de passage de la forme $P = \dots$

Correction —

1. $\chi_M = (X-2)(X-1)^2$. χ_M est scindé donc M est trigonalisable.
   $X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres 2 et 1.
   On pose alors :
   $$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$
   et on résout $PT = MP$. On voit alors qu'on peut poser $a = 1$, $b = -1$ et $c = 0$. On vérifie que la matrice P obtenue est bien inversible.
2. Soient $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   On a $T = D + N$ avec $N^2 = O_3$. De plus, D et N commutent donc d'après la formule du binôme,
   $$T^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$
   On trouve alors :
   $$T^n = D^n + nND^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Au final, $M^n = (PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1}$
   $$= \begin{pmatrix} 2^n - n & 2^n - 1 & -n \\ n & 1 & n \\ 1 - 2^n + n & 1 - 2^n & 1 + n \end{pmatrix}$$

♣ Exercice 3 — *Rang et valeurs propres*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La matrice J est-elle diagonalisable ?

Indication — Que déduire du rang de J ?

Correction — $\mathrm{rg}(J) = 1$ donc $\dim(\mathrm{Ker}(J)) = n - \mathrm{rg}(J) = n-1$. Ainsi, 0 est valeur propre d'ordre de multiplicité au moins $n-1$. Par ailleurs, $\mathrm{Tr}(J) = n$ donc la somme des valeurs propres vaut n donc la dernière valeur propre est nécessairement n (valeur propre simple). Ainsi, l'ordre de multiplicité de 0 est exactement $n-1$ et J est diagonalisable.

♣♣ **Exercice 4 —** *Polynômes annulateurs*
On considère la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Calculer J^n pour tout entier naturel n.
2. En déduire les valeurs propres possibles de J.
3. En déduire les valeurs propres de J.
4. J est-elle diagonalisable ?

Indications —

1. On pourra considérer l'endomorphisme f canoniquement associé (et étudier le cas $n=3$).

3. À quelle condition sur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a-t-on $JX = \omega^k X$?

Correction —

1. $J^n = I_n$ car $f^p(e_k) = e_{k-p}$ si $k > p$, $f^p(e_k) = e_{n+k-p}$ sinon.
2. Si X est un vecteur propre de J associé à la valeur propre λ, on a $J^n X = \lambda^n X = X$ donc $\lambda^n = 1$ et les valeurs propres de J sont **des** racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.
3. On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. On montre que toutes les racines de l'unité sont valeurs propres de J :
$$JX = \omega^k X \iff X = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^k \\ \vdots \\ \omega^{k(n-1)} \end{pmatrix}$$
4. J possède n valeurs propres distinctes.

♣♣ **Exercice 5 —** *Du côté des polynômes*
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels distincts a et b.
Pour $P \in E$, on pose :

$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Montrer que $((X-a)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Écrire la matrice de φ dans cette base et en déduire que φ est diagonalisable.

Correction —

1. La linéarité est immédiate. Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, le terme de degré $n+1$ de $(X-a)(X-b)P'$ vaut $na_n X^{n+1}$, tout comme celui de nXP. Donc $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
2. C'est une famille de polynômes non nuls échelonnée en degrés.
3. Calculons donc $\varphi((X-a)^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ et exprimons ces quantités comme des CL des $(X-a)^i$.
$$\begin{aligned}\varphi((X-a)^k) &= k(X-a)^k(X-b) - nX(X-a)^k \\ &= [(k-n)X - bk](X-a)^k \\ &= (k-n)(X-a)^{k+1} + (a(k-n) - bk)(X-a)^k\end{aligned}$$
La matrice obtenue est triangulaire inférieure, les valeurs propres $(a-b)k - an$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ se lisent sur la diagonale. Elles sont distinctes (à vérifier) donc φ est diagonalisable.

♣♣ **Exercice 6 —** *Du côté des matrices*
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, avec $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(M) = M - \mathrm{Tr}(M)A$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments propres de ϕ et établir sa diagonalisabilité.

Indication — Que vaut la trace des vecteurs propres de ϕ ? Que vaut $\dim(H)$ où $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Tr}(M) = 0\}$?

Correction — Recherchons les éléments propres de ϕ.

- Supposons que $\mathrm{Tr}(M) = 0$.
  On a $\phi(M) = M$. Ainsi, $H \subset \mathbf{E}_1(\phi)$ et 1 est donc valeur propre d'ordre au moins $\dim(H) = n^2 - 1$.
- Supposons maintenant que $\mathrm{Tr}(M) \neq 0$.
  Si $\phi(M) = \lambda M$ alors, en passant à la trace, $\lambda = 1 - \mathrm{Tr}(A)$.
  Donc $\mathrm{Tr}(M)A = \mathrm{Tr}(A)M$ ce qui montre que $M \in \mathrm{Vect}(A)$.
  Réciproquement, $\phi(A) = (1 - \mathrm{Tr}(A))A$.
  Donc $\mathrm{Vect}(A) = \mathbf{E}_{1+\mathrm{Tr}(A)}(\phi)$.

Comme les valeurs propres sont distinctes, $E_1(\phi) = H$ et $E_{1-\mathrm{Tr}(A)} = \mathrm{Vect}(A)$. ϕ est bien diagonalisable car $\dim(E_1(\phi)) + \dim(E_{1-\mathrm{Tr}(A)}(\phi)) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

♣♣♣ **Exercice 7 —** *Du côté des fonctions continues*
Soit E le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathscr{C}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ s'annulant en 0.
On note φ l'application définie sur E par $\varphi(f) = g$ avec :

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer les éléments propres de φ.

Indications —

1. On pourra faire apparaître un taux d'accroissement.
2. On pourra résoudre une certaine équation différentielle ; penser à éliminer les solutions superflues.

Correction —

1. g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons F la primitive de f qui s'annule en 0. Comme $g(x) = \dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0) = f(0) = 0 = g(0)$, g est continue en 0.
2. Si $g(x) = \lambda f(x)$, alors $\lambda x f'(x) = (1-\lambda) f(x)$. On trouve ainsi, pour $x > 0$, $f(x) = Cx^\alpha$ avec $\alpha = {}^{(1-\lambda)}/_{\lambda}$ dès que $\lambda \neq 0$. Mais $f \in E$ seulement pour $\alpha > 0$, i.e. $\lambda \in]0,1[$. Bref, $\mathrm{Sp}(\varphi) =]0,1[$ et $E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^{(1-\lambda)/\lambda}\right)$.