Suites et séries de fonctions

Entraînement 8

♣ Exercice 1 — Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où f_n est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Indication — On utilisera l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

Correction —

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \mapsto 1$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $g_n = f - f_n$.

$$\forall x \in [a,b], \quad |g_n(x)| = x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{nx}\right)\right| \leqslant \frac{|x|}{n}$$

Donc $\|g_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\max(|a|,|b|)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
La convergence est uniforme.

♣ Exercice 2 — Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall x > 0, \quad f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx^2} \quad (\alpha > 0)$$

Indication — Pour justifier la convergence uniforme, on pourra ici calculer $\|f_n\|_\infty$.

Correction —

1. $n^\alpha e^{-\beta n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour $\beta > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle (on traitera séparément le cas $x = 0$).
2. Une étude de f_n' montre que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

$$\|f_n\|_\infty = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} n^{\alpha - 1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \alpha < \frac{1}{2}$$

Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < \dfrac{1}{2}$.

♣♣ Exercice 3 — Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$, de dérivée seconde bornée. Étudier la convergence simple puis uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

Indication — On pourra exploiter l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Correction —

1. f est dérivable donc $f(x+h) \underset{h\to 0}{=} f(x) + hf'(x) + o(h)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right) \underset{n\to+\infty}{=} f'(x) + o(1)$$

La suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ainsi simplement sur $\mathbb{R}$ vers f'.

2. f étant de classe $\mathscr{C}^2$ et f'' bornée, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous permet d'écrire pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\left|f(b) - f(a) - (b-a)f'(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\|f''\|_\infty$$

L'inégalité devient ici, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) - \frac{f'(x)}{n}\right| \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{2n^2}$$

Ainsi, $|\varphi_n(x) - f'(x)| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{2n}$ et donc,

$$\|\varphi_n - f'\|_\infty \leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La convergence est bien uniforme.

♣ Exercice 4 — Étudier les convergences simple, uniforme et normale sur $\mathbb{R}$ des deux séries de fonctions de termes généraux :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2}$$

Correction —

1. $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n^2}$. $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément et simplement) sur $\mathbb{R}$.
2. $\|g_n\|_\infty = \dfrac{1}{n}$ donc $\sum g_n$ ne converge pas normalement. Le critère spécial des séries alternées assure la convergence simple et même uniforme de $\sum g_n$ sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k + x^2}\right| \leqslant \frac{1}{n+1+x^2} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

donc $\|R_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

La convergence uniforme assure enfin la convergence simple de la série de fonctions.

♣♣ Exercice 5 — On pose, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$$

1. Vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier sa monotonie.
3. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$xf(x) - f(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

4. Donner un équivalent de $f(x)$ en 0 et en $+\infty$.

Correction — Posons $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. $\|f_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} \leqslant \dfrac{1}{n!}$. La série $\sum f_n$ converge normalement donc simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. On applique le théorème de dérivation terme à terme.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
   - $\|f_n'\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n!}$. $\sum f_n'$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}_+^*$.

   f est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

   D'après le critère spécial des séries alternées, $f'(x)$ est du signe de $f_0(x) < 0$. f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3.
$$\begin{aligned}\forall x > 0, \quad xf(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(x+n-n)}{n!(x+n)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)}\end{aligned}$$

   Ainsi, $xf(x) - f(x+1) = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
4. Par continuité de f en 1,

$$xf(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + f(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} f(1) + \frac{1}{\mathrm{e}} = 1$$

   $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$. On montre de même que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\mathrm{e}x}$.

♣♣ Exercice 6 — Prouver l'existence et calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\alpha x} - 1}\,\mathrm{d}x \quad \text{pour} \quad \alpha > 0$$

Indication — Pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\alpha x}}$ est la somme d'une série géométrique.

Correction —

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\alpha x} - 1}$ est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \frac{1}{\alpha}$ et :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

   f est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Sous réserve d'interversion,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{\alpha x} - 1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} x \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-n\alpha x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-n\alpha x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\alpha^2 n^2} = \frac{\pi^2}{6\alpha^2}\end{aligned}$$

   en calculant l'intégrale au moyen d'une intégration par parties sur un segment. L'interversion est de plus justifiée par le théorème d'intégration terme à terme.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto x\mathrm{e}^{-n\alpha x}$ est continue.
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f, continue.
   - $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{\alpha^2 n^2}$ et $\displaystyle\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge.

♣♣ Exercice 7 — Montrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

Correction —

1. $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est continue sur $]0, 1[$ et :

$$f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t) \geqslant 0 \text{ et } f(t) \underset{t\to 1}{\sim} (t-1)\ln(1-t) \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

   La fonction est prolongeable par continuité en 1 et la règle des équivalents appliquée à des fonctions positives nous permet de lever le problème d'intégrabilité en 0. Bref, f est intégrable sur $]0, 1[$.
2. Pour tout $t \in [0, 1[$, $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{n}$.

   Sous réserve d'interversion,

$$\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} \int_0^1 \ln(t)t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

   On calcule la dernière intégrale par intégration par parties (sur un segment !). L'interversion est licite :
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : t \mapsto -\ln(t)\dfrac{t^{n-1}}{n}$ est continue.
   - $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers f, continue.
   - $\displaystyle\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{n^3}$ et $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n|$ converge.